Examen de Curvas Algebraicas. 18 de junio de 2012

Teoría. Duración: 45 minutos. Justificar todas las respuestas.
Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.

1. (1.5 puntos) Dos cónicas proyectivas irreducibles distintas $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ se cortan en dos puntos distintos P, Q con multiplicidad 2 en cada uno de ellos. Encuentra una expresión para el haz generado por $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y halla todos las cónicas reducibles del mismo.

2. (1.5 puntos) Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curvas algebraicas sin componentes en común. Demuestra la fómula

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) = \mathrm{Sing}(\mathcal{C}) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{D}) \cup (\mathcal{C} \cap \mathcal{D})$$

y pon un ejemplo.

Examen de Curvas Algebraicas. 18 de junio de 2012

Problemas. Duración: 3 horas. Justificar todas las respuestas.
Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.
Notación: $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$.

3. (2 puntos) Se consideran el *folium de Descartes* $\mathcal{C}$, de ecuación $X^3 + Y^3 - 3XYZ = 0$, la cónica $\mathcal{D}$ de ecuación $2X^2 - 3XZ + 2Y^2 - 3YZ = 0$ y los puntos $P = (3 : 3 : 2)$, $Q = (3\alpha^2 : 3\alpha : 2)$, donde $\alpha = e^{2\pi i/3}$. Probar que P y Q pertenecen a ambas curvas y hallar la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en cada punto del plano.

4. (1.5 puntos) Se considera el haz $\mathcal{H}$ de cúbicas generado por $X(XY - Z^2)$ y Z^3. Hallar los puntos base de $\mathcal{H}$. Hallar las cúbicas singulares de $\mathcal{H}$. ¿Es liso (resp. inflexión) P_1 en una cúbica genérica de $\mathcal{H}$? Idem. para P_2.

5. (1.5 puntos) Demostrar que la dual de la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $YZ^2 - X^3 + XZ^2 = 0$ es la curva $4(B - A)^3 - 27BC^2 = 0$. Hallar las inflexiones de $\mathcal{C}$. ¿Qué nos dicen la fórmulas de Plücker sobre $\mathcal{C}$?

6. (2 puntos) Hallar la asíntotas y las ramas parabólicas de la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $X^4 + X^3 - Y^2 = 0$. Hacer una representación gráfica de la parte real de $\mathcal{C}$. ¿Cuántas tangentes se pueden trazar a la completada proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$ desde el punto P_1? Hallar las ecuaciones de dichas rectas.

Soluciones a los Problemas

3. Sean $F = X^3+Y^3-3XYZ$, $G = 2X^2-3XZ+2Y^2-3YZ$. Es inmediato comprobar que $F(P) = G(P) = F(Q) = G(Q) = 0$, usando que $\alpha^3 = 1$. Además, el punto Q no es real y, como F y G son formas reales, entonces F y G se anulan en el conjugado $\overline{Q}$ de Q, que tiene coordenadas $(3\overline{\alpha}^2 : 3\overline{\alpha} : 2) = (3\alpha : 3\alpha^2 : 2)$, pues $\overline{\alpha} = \alpha^2$. Por tanto, tenemos que $P, Q, \overline{Q} \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Es fácil calcular las rectas tangentes a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en P: en ambos casos sale $X + Y - 3Z = 0$. Entonces, $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 2$, por la *desigualdad*

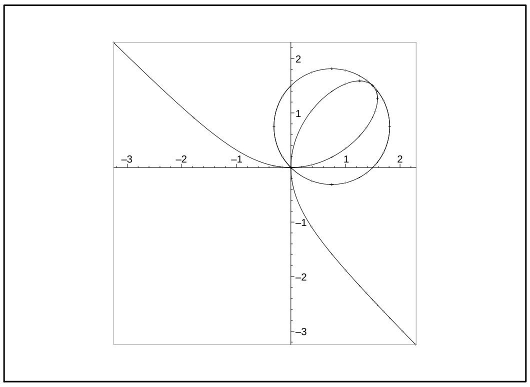

FIGURA 1. *Folium de Descartes* y cónica.

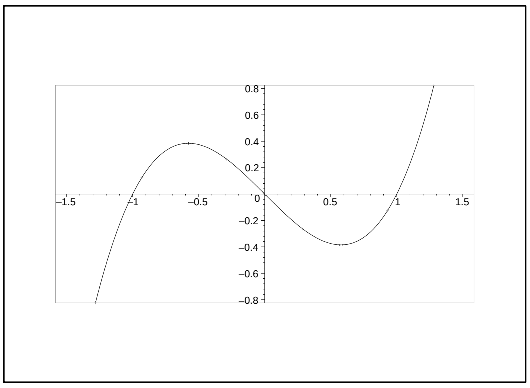

FIGURA 2. Cúbica de ecuación $Y - X^3 + X = 0$.

fundamental. Además, es claro que $P_3 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, siendo punto doble en $\mathcal{C}$. Entonces, $\mathrm{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 2$, por la *desigualdad fundamental*.

Con todo lo anterior y, aplicando el *teorema de Bézout*, obtenemos

$$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 2,$$

$$\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \mathrm{mult}_{\overline{Q}}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 1.$$

4. La base de $\mathcal{H}$ se obtiene cortando dos elementos cualesquiera: hacemos $X(XY - Z^2) = Z^3 = 0$ y obtenemos P_2 con multiplicidad 6 y P_1 con multiplicidad 3.

Una cúbica de $\mathcal{H}$ es $F_{\lambda,\mu} = \lambda X(XY - Z^2) + \mu Z^3$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Igualando a cero el gradiente de $F_{\lambda,\mu}$, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\lambda XY - \lambda Z^2 &= 0 \\ \lambda X^2 &= 0 \\ -2\lambda XZ + 3\mu Z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, obtenemos la cúbica $Z^3 = 0$, que es una recta triple. Si $\lambda \neq 0$, pongamos $\lambda = 1$, y obtenemos que P_2 es punto singular de $\mathtt{V}(F_{1,\mu})$. Deshomogeneizando respecto de Y obtenemos el polinomio $X^2 - XZ^2 + \mu Z^3$, lo que indica que P_2 es punto doble no ordinario en $\mathtt{V}(F_{1,\mu})$. P_2 no es inflexión, al no ser liso.

Deshomogeneizando respecto de X obtenemos el polinomio $\lambda Y - \lambda Z^2 + \mu Z^3$. Si $\lambda \neq 0$, P_1 es liso no inflexión en $\mathtt{V}(F_{\lambda,\mu})$, pues $\mathrm{cont}_{P_1}(\mathtt{V}(F_{\lambda,\mu})) = 2$. Esta condición es genérica en el haz $\mathcal{H}$.

5. Primer método: calculamos el gradiente de F y ponemos $A = -3X^2 + Z^2$, $B = Z^2$, $C = 2(X+Y)Z$. A continuación sustituimos A, B, C por su valor en $4(B-A)^3 - 27BC^2$, obteniendo 0. Esto implica que la curva dual $\mathcal{C}^*$ está contenida en $\mathtt{V}(4(B-A)^3 - 27BC^2)$. Además, calculamos las singularidades de $\mathcal{C}$, obteniendo un punto doble no ordinario en P_2. Al ser $\mathcal{C}$ un cúbica, P_2 debe ser una cúspide ordinaria, luego $\kappa = 1$, $\delta = 0$ y así $d^* = 3$, gracias a la fórmula de Plücker de la clase. Por tanto $\mathcal{C}^* = \mathtt{V}(4(B-A)^3 - 27BC^2)$.

Segundo método: ponemos $A = -3X^2 + Z^2$, $B = Z^2$, $C = 2(X+Y)Z$. Ahora, mediante operaciones algebraicas en la igualdad $YZ^2 - X^3 + XZ^2 = 0$, eliminamos X, Y, Z, obteniendo una relación entre A, B, C. Se puede hacer así: $B - A = 3X^2$, $X + Y = \frac{C}{2Z}$, $YZ^2 - X^3 + XZ^2 = (X+Y)B - X^3 = 0$, luego $\frac{BC}{2Z} = X^3$ y, elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{B^2C^2}{4B} = X^6 = \frac{(B-A)^3}{27}$$

luego $27BC^2 = 4(B-A)^3$. Además, razonamos como arriba que $d^* = 3$.

En el primer o segundo método, en lugar de calcular $d^* = 3$, podríamos razonar que la forma $4(B-A)^3 - 27BC^2$ es irreducible (usando que tiene grado 2 en C).

Tercer método: sea $AX + BY + CZ = 0$ la ecuación de una recta móvil L del plano proyectivo. Cortamos L con $\mathcal{C}$ y buscamos los puntos con multiplicidad de intersección mayor que uno. Para ello, consideramos $F(BX, BY, BZ)$, i.e., $F(BX, -AX - CZ, BZ)$, obteniendo

$$G = (-AX - CZ)B^2Z^2 - B^3X^3 + B^3XZ^2 = -B^3X^3 + B^2(B-A)XZ^2 - CB^2Z^3$$

$$g = G(X,1) = -B^3X^3 + B^2(B-A)X - CB^2.$$

Calculamos la derivada g' de g respecto de X y luego la resultante $R^X_{g,g'}$, obteniendo

$$B^{10}\begin{vmatrix} -B & 0 & B-A & -C & 0 \\ 0 & -B & 0 & B-A & -C \\ -3B & 0 & B-A & 0 & 0 \\ 0 & -3B & 0 & B-A & 0 \\ 0 & 0 & -3B & 0 & B-A \end{vmatrix} = B^{10}\left(4(B-A)^3 - 27BC^2\right).$$

El discriminante de g es

$$B^7\left(4(B-A)^3 - 27BC^2\right)$$

y la ecuación de la curva dual es $4(B-A)^3 - 27BC^2 = 0$. Descartamos ahora el factor B^7, que está causado por la sustitución efectuada más arriba así como por las rectas que pasan por el punto singular P_2 de $\mathcal{C}$ y obtenemos $4(B-A)^3 - 27BC^2 = 0$ como ecuación de la curva dual.

Es fácil comprobar que P_2 es punto doble no ordinario de la cúbica irreducible $\mathcal{C}$, luego P_2 es una cúspide ordinaria. Tenemos entonces

$\kappa = 1$, $\delta = 0$ y así $d^* = d(d-1) - 2\delta - 3\kappa = 6 - 3 = 3$. Por otro lado $i = 3d(d-2) - 6\delta - 8\kappa = 9 - 8 = 1$, lo que nos dice que $\mathcal{C}$ tiene una inflexión (ordinaria). Claramente este punto es P_3 (se puede razonar con la función real de variable real $Y = g(X) = X^3 - X$, (cuya gráfica aparece en la figura 2 de los enunciados) o se puede calcular el orden de contacto de $\mathcal{C}$ en P_3 o se puede calcular la curva hessiana de $\mathcal{C}$ y cortarla con $\mathcal{C}$).

6. Los puntos de $\mathcal{C}$ en el infinito satisfacen $Z = X^4 = 0$, de donde obtenemos el punto P_2. Deshomogeneizando respecto de Y, obtenemos $f_2 = X^4 + X^3Z - Z^2$, lo que demuestra que P_2 es un punto doble no ordinario, con cono tangente $Z^2 = 0$. Por ello, $\mathcal{C}$ presenta ramas parabólicas asociadas a P_2 y no posee asíntotas.

Para la representación gráfica, primero representamos en $\mathbb{R}^2$ la curva auxiliar $Y = X^4+X^3$, con $Y' = X^2(4X+3)$, $Y(0) = 0$, $Y(-3/4) < 0$, $\lim_{X\to\pm\infty} Y = +\infty$, obteniendo la figura 3. Después, "tomamos raíces

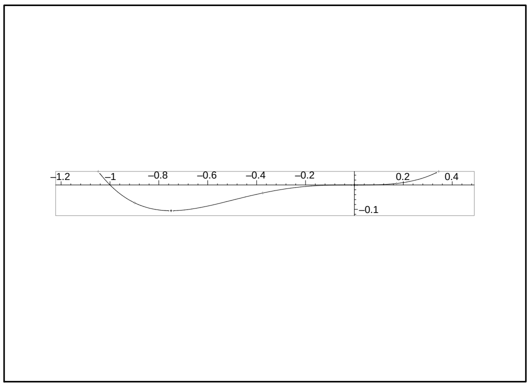

FIGURA 3. Curva $Y = X^4 + X^3$.

cuadradas"y obtenemos la figura 4.

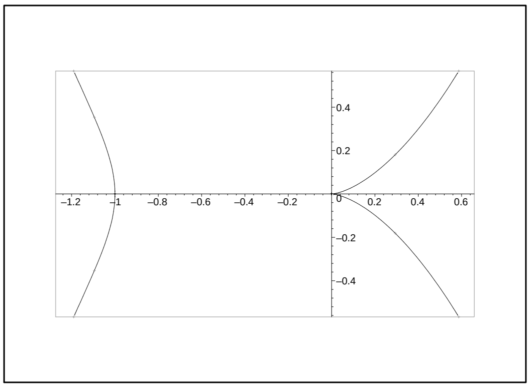

FIGURA 4. Cuártica de ecuación $X^4 + X^3 - Y^2 = 0$.

La curva polar $\mathcal{P}_{P_1}\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ respecto de P_1 tiene ecuación $X^2(4X + 3Z) = 0$. Cortándola con $\mathcal{C}$, obtenemos los puntos P_2, P_3, que son singulares en $\mathcal{C}$, y $Q_+ = (-12 : 3\sqrt{3}i : 16)$, $Q_- = (-12 : -3\sqrt{3}i : 16)$.

Estos son los pies de las tangentes a $\mathcal{C}$ trazadas desde P_1. Las rectas tangentes buscadas son $L_{P_1Q_+}$ y $L_{P_1Q_-}$, de ecuaciones respectivas

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -12 & \pm 3\sqrt{3}i & 16 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -16Y \pm 3\sqrt{3}iZ.$$