Examen de Curvas Algebraicas. Septiembre de 2012

3. Pongamos $F = X^4 + X^3Z - Y^2Z^2$ y $G = Y^2 - X^2 - XZ$. Es fácil comprobar que $F(P) = G(P) = F(P_3) = G(P_3) = F(Q) = G(Q) = 0$, donde $Q = (-1 : 0 : 1)$. Tomando el punto $P' = (1 : -\sqrt{2} : 1)$, comprobamos que $F(P') = G(P') = 0$.

Por la desigualdad fundamental, tenemos $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 2$, ya que la recta $X + Z = 0$ es tangente común a ambas curvas en Q. Por la desigualdad fundamental, tenemos $\mathrm{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 2$, ya que P_3 es doble en $\mathcal{C}$ y liso en $\mathcal{D}$, con rectas tangentes distintas. Además $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 1$ y $\mathrm{mult}_{P'}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 1$. Comprobando que las tangentes de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en P no coinciden, obtenemos $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 1$. Análogamente, $\mathrm{mult}_{P'}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 1$. Y, por el teorema de Bézout, dichas multiplicidades deben sumar 8.

Es fácil ver que la única solución del sistema $F = G = Z = 0$ es $X = Y = Z = 0$, que no proporciona ningún punto de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Esto significa que no hay puntos de intersección en el infinito, para las curvas de la figura 1.

Caben, pues, dos posibilidades: o bien $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 4$ o bien $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 2$ y existen dos puntos complejos conjugados en $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, cada uno con multiplicidad 1. Para salir de dudas, calculamos la resultante $R^Y_{F,G}$ (que es de orden 4×4), obteniendo $X^2(X + Z)^4(X - Z)^2$. El factor que corresponde al punto Q es $(X + Z)^4$, por lo que $\mathrm{mult}_Q(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 4$.

4. Si $F(P_3) = 0$, entonces $a = 0$. Deshomogeneizando F respecto de Z, obtenemos $f_3 = b(X+Y)+TGS$. Para que P_3 sea singular, debe ocurrir que $b = 0$, quedando

$$F = c(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) + d(X^2YZ + Y^2XZ + Z^2XY),$$

donde $c, d \in \mathbb{C}$. Se trata de un haz $\mathcal{H}$ de cuárticas. Observemos que, por simetría en X, Y, Z, los puntos P_1 y P_2 son singulares en toda curva de $\mathcal{H}$.

Deshomogeneizando F respecto de Z, obtenemos $f_3 = c(X^2+Y^2)+dXY+TGS$. Para que $c(X^2+Y^2)+dXY$ sea un cuadrado, debe ocurrir que $d = \pm 2c$. Así, obtenemos dos cuárticas en $\mathcal{H}$ para las que P_3 es punto doble no ordinario.

Sea $F = c(X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2)+d(X^2YZ+Y^2XZ+Z^2XY)$ tal que $F(P_4) = 0$. Entonces $3(c + d) = 0$. Podemos tomar $c = 1 = -d$ y así $F = X^2Y^2+X^2Z^2+Y^2Z^2-(X^2YZ+Y^2XZ+Z^2XY)$. Aquí, P_3 es punto doble ordinario (ya que $d \neq \pm 2c$). Por simetría, lo mismo ocurre para P_1 y P_2. Si comprobamos que F es irreducible, tendremos que $\mathtt{V}(F)$ es una cuártica nodal. Para ver que F es irreducible trabajamos, por ejemplo, en $\mathbb{C}[Y, Z][X]$. El grado de F en X es dos. Las raíces de F son

$$X = \frac{Y^2Z + Z^2Y \pm \sqrt{D}}{2(Y^2 + Z^2 - YZ)}$$

con

$$D = -3Y^2Z^2(Y - Z)^2.$$

De ahí se obtiene

$$X = \frac{YZ(Y+Z) \pm \sqrt{3}iYZ(Y-Z)}{2(Y^2+Z^2-YZ)}$$

luego

$$x_1 = \frac{YZ(Y\alpha + Z\overline{\alpha})}{2(Y^2+Z^2-YZ)}, \quad x_2 = \frac{YZ(Y\overline{\alpha} + Z\alpha)}{2(Y^2+Z^2-YZ)},$$

con $\alpha = 1+\sqrt{3}i$. Como $F = (X-x_1)(X-x_2)$ y x_1, x_2 no pertenecen a $\mathbb{C}[Y,Z]$, deducimos que F es irreducible en $\mathbb{C}[Y,Z][X]$.

5. Ponemos $F_d = X^d + Y^{d-1}Z$ y deshomogeneizamos respecto de Z, obteniendo que el cono tangente en P_3 tiene ecuación Y^{d-1}, de donde se sigue que P_3 es punto de orden $d-1$ no ordinario de $\mathcal{C}_d$. En esta situación, la proposición 3.58 asegura que la curva afín $\mathcal{D}_d$ de ecuación $X^d + Y^{d-1} = 0$ es racional. Además, obtenemos una parametrización cortando con las rectas $L_t : Y = tX$, $t \in \mathbb{C}$. De este modo llegamos a

$$X^d + (tX)^{d-1} = X^{d-1}(X + t^{d-1}) = 0.$$

- Si $X^{d-1} = 0$ entonces $Y^{d-1} = 0$, obteniendo el punto P_3 con multiplicidad $d-1$.
- Si $X + t^{d-1} = 0$ entonces $Y = -t^d$, obteniendo el punto $(-t^{d-1}, -t^d)$ con multiplicidad 1.

La parametrización de $\mathcal{D}_d$ es $X = -t^{d-1}$, $Y = -t^d$, con $t \in \mathbb{C}$. Entonces, una parametrización racional de $\mathcal{C}_d$ es $X = -t^{d-1}s$, $Y = -t^d$, $Z = s^d$ con $(t:s) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Primer método para hallar la curva dual: dicha curva se obtiene a partir de los menores de orden 2 de la siguiente matriz de derivadas parciales:

$$\begin{pmatrix} -(d-1)t^{d-2}s & -dt^{d-1} & 0 \\ -t^{d-1} & 0 & ds^{d-1} \end{pmatrix}$$

obteniéndose los menores

$$-d^2t^{d-1}s^{d-1}, \quad d(d-1)t^{d-2}s^d, \quad -dt^{2d-2}.$$

Dividiendo por el factor común dt^{d-2}, llegamos a

$$A = -dts^{d-1}, \quad B = (d-1)s^d, \quad C = -t^d, \tag{1}$$

con $(t:s) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, que es una parametrización racional de $\mathcal{C}_d^*$.

Segundo método: calculamos el gradiente de F_d y escribimos

$$A = dX^{d-1}, \quad B = (d-1)Y^{d-2}Z, \quad C = Y^{d-1}.$$

Ahora buscamos una relación algebraica entre A, B y C bajo la condición $X^d + Y^{d-1}Z = 0$. Elevando a $d-1$ en la igualdad $X^d = -Y^{d-1}Z$ obtenemos

$$\frac{A^d}{d^d} = (-1)^{d-1}Y^{(d-1)^2}Z^{d-1} = (-1)^{d-1}Y^{(d-1)^2}\left(\frac{B}{(d-1)Y^{d-2}}\right)^{d-1}.$$

Quitando denominadores y operando obtenemos $(1-d)^{d-1}A^d = d^d B^{d-1}C$, que es una ecuación de la curva dual. A esta ecuación también se puede llegar eliminando los parámetros t y s en la expresión (1).

Observemos que $Q = (0:1:1-d) \notin \mathcal{C}_d$. La curva polar de $\mathcal{C}_d$ respecto de Q tiene ecuación $(d-1)Y^{d-2}(Z-Y) = 0$.

- Si $Y^{d-2} = 0$, obtenemos el punto P_3, que es singular en $\mathcal{C}_d$.
- Si $Z - Y = 0$, obtenemos $X^d + Y^d = 0$, de donde $S_j = (\xi^{1+2j} : 1 : 1)$, con $\xi = e^{\pi i/d}$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$. Estos d puntos distintos son los pies de las tangentes a $\mathcal{C}_d$ trazadas desde Q.

Hay d rectas tangentes a $\mathcal{C}_d$ trazadas desde Q. Sus ecuaciones son $\operatorname{grad}(F_d)_{S_j} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, d-1$.

6. La completada proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ tiene ecuación $F = 0$, con $F = X^5 + Y^5 + Z^5$. Los puntos del infinito de $\mathcal{C}$ se obtienen resolviendo el sistema $Z = X^5 + Y^5 = 0$, de donde se sigue que $S_j = (\beta^{1+2j} : 1 : 0)$ con $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Obsérvese que $S_2 = (-1 : 1 : 0)$ es real, mientras que S_j no es real, si $j \neq 2$.

Calculamos ahora $\operatorname{grad} F = 5(X^4, Y^4, Z^4)$ y $\operatorname{grad}(F)_{S_j} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = 0$, obteniendo las ecuaciones $\beta^{2j}X + Y = 0$, con $j = 0, 1, 2, 3, 4$ (usamos que $\beta^{10} = 1$). Estas son las asíntotas de $\mathcal{C}$. Obsérvese que, entre todas, solo es real la recta de ecuación $X + Y = 0$. Además $\mathcal{C}$ no posee ramas parabólicas.

La curva $\overline{\mathcal{C}}$ es lisa, ya que $\operatorname{grad} F$ no se anula en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, y su clase es $d^* = d(d-1) = 20$.

La curva hessiana de $\overline{\mathcal{C}}$ es $V(X^3Y^3Z^3)$, la unión de los tres ejes coordenados, cada uno de ellos contado tres veces. Si cortamos, por ejemplo, $V(Z^3)$ con $\overline{\mathcal{C}}$ obtenemos los puntos S_j, cada uno de ellos con multiplicidad 3. Todos son inflexiones de $\overline{\mathcal{C}}$ y son inflexiones no ordinarias, por la proposición 5.32 b. Por simetría en X, Y, Z, hay otras 10 inflexiones no ordinarias en $\overline{\mathcal{C}}$. Solo 3 inflexiones son reales: $(-1 : 1 : 0)$, $(-1 : 0 : 1)$ y $(0 : -1 : 1)$.