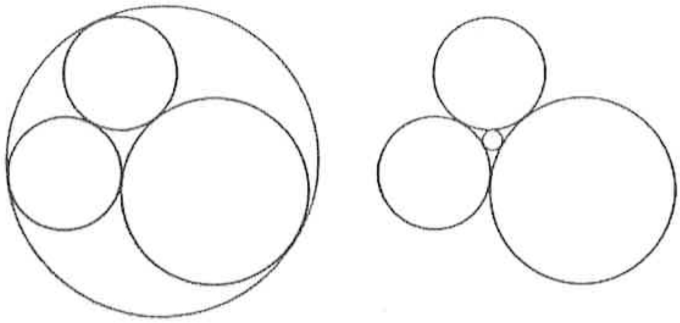
Problema 1: Teorema de Descartes de las cuatro circunferencias tangentes

M.J. de la Puente



Teorema: Los inversos ϵ_j de los radios r_j de cuatro circunferencias $\mathcal{C}_j$ mutuamente tangentes satisfacen

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 = 2\left(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2\right) \tag{1}$$

En particular, los inversos ϵ_j de los radios r_j de tres circunferencias $\mathcal{C}_j$ mutuamente tangentes y tangentes a una recta L satisfacen

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 = 2\left(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2\right) \tag{2}$$

Se dice que ϵ_j es el *radio de curvatura* de la circunferencia $\mathcal{C}_j$.

EXPLORACIÓN (Kerins et al. y M.J. de la Puente)

PASO 1. DATOS: $\mathcal{C}_1$ circunferencia de centro $P_1 = (0, \frac{1}{2})$, radio $r_1 = \frac{1}{2}$, diámetro $d_1 = 1$, $\mathcal{C}'$ circunferencia de centro $P' = (1, \frac{1}{2})$, radio $r' = \frac{1}{2}$, diámetro $d' = 1$ y recta L de ecuación $y = 0$.

BUSCAMOS: $\mathcal{C}_2$ circunferencia tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}'$ y L.

SOLUCIÓN: centro $P_2 = (x_2, y_2)$, radio r_2, diámetro d_2 tales que

$$\begin{cases} d(P_1, P_2) = r_1 + r_2 \\ d(P', P_2) = r' + r_2 \\ d(L, P_2) = r_2 = y_2 \end{cases} \simeq \begin{cases} x_2^2 + \left(y_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + y_2\right)^2 \\ (x_2 - 1)^2 + \left(y_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + y_2\right)^2 \end{cases} \simeq$$

$$\begin{cases} x_2^2 + \left(y_2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + y_2\right)^2 \\ x_2^2 = (x_2 - 1)^2 \end{cases}$$

de donde $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $r_2 = \frac{1}{8}$, $d_2 = \frac{1}{4}$.

PASO 2. DATOS: $\mathcal{C}_1$ circunferencia de centro $P_1 = (0, \frac{1}{2})$, radio $r_1 = \frac{1}{2}$, diámetro $d_1 = 1$, $\mathcal{C}_2$ circunferencia de centro $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, radio $r_2 = \frac{1}{8}$, diámetro $d_2 = \frac{1}{4}$ y recta L de ecuación $y = 0$.

BUSCAMOS: $\mathcal{C}_3$ circunferencia tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y L.

SOLUCIÓN: centro $P_3 = (x_3, y_3)$, radio r_3, diámetro d_3 tales que

$$\begin{cases} d(P_1, P_3) = r_1 + r_3 \\ d(P_2, P_3) = r_2 + r_3 \\ d(L, P_3) = r_3 = y_3 \end{cases} \simeq \begin{cases} x_3^2 + \left(y_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + y_3\right)^2 \\ \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{8} + y_3\right)^2 \end{cases} \simeq$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_3^2 = y_3 \\ 2x_3^2 - 2x_3 + \frac{1}{2} = y_3 \\ \text{(dos parábolas)} \end{cases} \simeq \begin{cases} \frac{1}{2}x_3^2 = y_3 \\ 3y_3 - 2x_3 + \frac{1}{2} = 0 \\ \text{(parábola y recta)} \end{cases}$$

de donde salen DOS soluciones: $P_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)$, $r_3 = \frac{1}{18}$, $d_3 = \frac{1}{9}$ y $P' = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ (ya conocida).

OBSERVAMOS: $d_1 = 1$, $d_2 = \frac{1}{4}$, $d_3 = \frac{1}{9}$, CONJETURA:

$$d_n = \frac{1}{n^2}$$

OBSERVAMOS: $P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $P_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{18}\right)$, CONJETURA:

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n^2}\right).$$

OBSERVAMOS: $(1+4+9)^2 = 14^2 = 196$ y $1^2+4^2+9^2 = 1+16+81 = 98$, CONJETURA:

$$(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 = 2\left(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2\right)$$

donde $\delta_j = \frac{1}{d_j}$. ES CONJETURA EQUIVALENTE:

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 = 2\left(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2\right)$$

donde $\epsilon_j = \frac{1}{r_j}$ que es precisamente la igualdad (2).

Si continuamos, se presentan dos posibilidades para $\mathcal{C}_4$:

CASO 1: $\mathcal{C}_4$ circunferencia tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y L (ver figura de arriba).

CASO 2: $\mathcal{C}_4$ circunferencia tangente a $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ y L (ver figura de abajo).

SOLUCIÓN CASO 1: centro $P_4 = (x_4, y_4)$, radio r_4, diámetro d_4 tales que

$$\begin{cases} d(P_1, P_4) = r_1 + r_4 \\ d(P_3, P_4) = r_3 + r_4 \\ d(L, P_4) = r_4 = y_4 \end{cases} \simeq \begin{cases} x_4^2 + \left(y_4 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + y_4\right)^2 \\ \left(x_4 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y_4 - \frac{1}{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{18} + y_4\right)^2 \end{cases}$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{1}{2}x_4^2 = y_4 \\ 16y_4 - 6y_4 + 1 = 0 \end{cases}$$

de donde salen DOS soluciones: $P_4 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32}\right)$, $r_4 = \frac{1}{32}$, $d_4 = \frac{1}{16}$ y P_2 (ya conocida).

SOLUCIÓN CASO 2: centro $P_4 = (x_4, y_4)$, radio r_4, diámetro d_4 tales que

$$\begin{cases} d(P_2, P_4) = r_2 + r_4 \\ d(P_3, P_4) = r_3 + r_4 \\ d(L, P_4) = r_4 = y_4 \end{cases} \simeq \begin{cases} x_4^2 - x_4 - \frac{1}{2}y_4 + \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{1}{3}x_4 + \frac{5}{18}y_4 - \frac{5}{36} = 0 \end{cases}$$

de donde salen DOS soluciones: $P'_4 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{50}\right) = \left(\frac{2}{n+1}, \frac{1}{2(n+1)^2}\right)$, $r'_4 = \frac{1}{50}$, $d'_4 = \frac{1}{25} = \frac{1}{(n+1)^2}$ y P_1 (ya conocida).

¿QUÉ OBTENEMOS USANDO (2) EN CASO 1 con $d_n = \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y $d_1 = 1$?

$$\left(1 + n^2 + x\right)^2 = 2\left(1^2 + n^4 + x^2\right)$$

luego $x^2 - 2x\left(1 + n^2\right) + \left(n^2 - 1\right)^2 = 0$, de donde

$$x = (n \pm 1)^2 .$$

Hemos obtenido la igualdad en enteros

$$\left(1 + n^2 + (n \pm 1)^2\right)^2 = 2\left(1 + n^4 + (n \pm 1)^4\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

¿QUÉ OBTENEMOS USANDO (2) EN CASO 2 con $d_n = \frac{1}{n^2}$, $d_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$ arbitrario?

$$\left(n^2 + (n+1)^2 + x\right)^2 = 2\left(n^4 + (n+1)^4 + x^2\right)$$

luego $x^2 - 2x\left(2n^2 + 2n + 1\right) + 4n^2 + 4n + 1 = 0$, de donde, haciendo operaciones, se deduce

$$x = 4n^2 + 4n + 1 \text{ ó } x = 1.$$

La segunda solución ya es conocida (corresponde a P_1) y, con la primera obtenemos la igualdad en enteros

$$\left(n^2 + (n+1)^2 + 4n^2 + 4n + 1\right)^2 = 2\left(n^4 + (n+1)^4 + (4n^2 + 4n + 1)^2\right), \ n \in \mathbb{N}$$

DEMOSTRACIÓN de (1) (Pedoe): Basada en un *teorema de Apolonio* y algo de geometría algebraica elemental. Según el *teorema de Apolonio*, existen ocho circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas en posición general. Supongamos dadas tres circunferencias $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ mutuamente tangentes. Por ser $\mathcal{C}_1$ tangente a si misma, $\mathcal{C}_1$ es solución del problema de Apolonio. Lo mismo ocurre con $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$. La multiplicidad con que se deben contar estas circunferencias en la solución del problema de Apolonio es, por un lado, mayor que uno, y por otro, la misma para las tres circunferencias. Sea esta k. Como $3k$ no es mayor que 8, entonces $k = 2$, de donde deducimos que hay otras dos circunferencias tangentes a las circunferencias dadas.

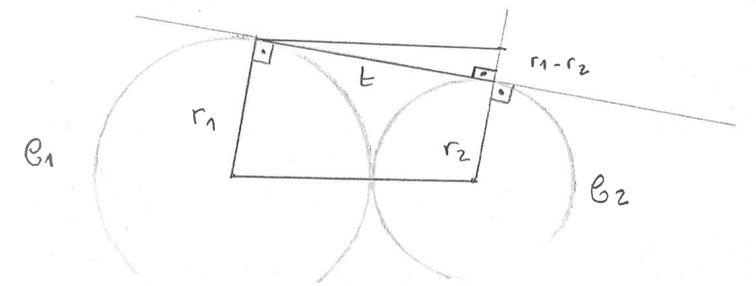
Si existe una relación entre las curvaturas de cuatro circunferencias mutuamente tangentes, dicha relación debe ser un polinomio cuadrático igualado a cero. Debe ser homogéneo y simétrico:

$$p \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j^2 + q \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \epsilon_i \epsilon_j.$$

Si dos circunferencias son tangentes externamente y t es la longitud del segmento tangente común, entonces

$$t^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4 r_1 r_2$$

(sencilla demostración sobre el dibujo, usando un paralelogramo y T. Pitágoras).



Si tres circunferencias son mutuamente tangentes y tangentes a una recta L y los puntos de tangencia en L son P, Q y R, entonces se sigue que

$$PQ^2 = 4 r_1 r_2, \quad QR^2 = 4 r_2 r_3, \quad PR^2 = 4 r_1 r_3.$$

Como $PQ \pm QR = PR$, se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} \pm \frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

de donde, en términos de curvaturas,

$$\sqrt{\epsilon_1} \pm \sqrt{\epsilon_2} \pm \sqrt{\epsilon_3} = 0.$$

Eliminado raíces, llegamos a

$$\sum_{j=1}^{3} \epsilon_j^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} \epsilon_i \epsilon_j = 0.$$

La recta L tiene curvatura nula y con esto llegamos al resultado más general

$$\sum_{j=1}^{4} \epsilon_j^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} \epsilon_i \epsilon_j = 0 \tag{3}$$

conocido como *teorema de Soddy (1936)*. Ahora bien, es evidente que

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)^2 - \sum_{j=1}^{4} \epsilon_j^2 = 2 \sum_{1 \le i < j \le 4} \epsilon_i \epsilon_j$$

de donde, combinado con (3), se sigue el teorema de Descartes (1).

COMPLEMENTOS: Hay otras demostraciones de este teorema, hay versiones en geometría hiperbólica y elíptica, y hay un poema en inglés (de Soddy (famoso por los isótopos), que es muy posterior a Descartes). Este problema fue propuesto por Descartes a la princesa Isabel de Hungría.

Referencias

[1] D. Audet, *Déterminants sphérique et hyperbolique de Cayley–Menger,* Bulletin AMQ, **LI**, n.2, (2011) 45–52.

[2] B. Kerins et al., *Famous functions in number theory*, Mathematics for teaching: a problem based approach V. 3, AMS, 2015.

[3] H.S.M. Coxeter, *Introduction to geometry, 2nd ed.*, Willey, 1969

[4] D. Pedoe, *On a theorem in geometry*, American Mathematical Monthly Vol. 74, No. 6 (Jun. - Jul., 1967), pp. 627-640.