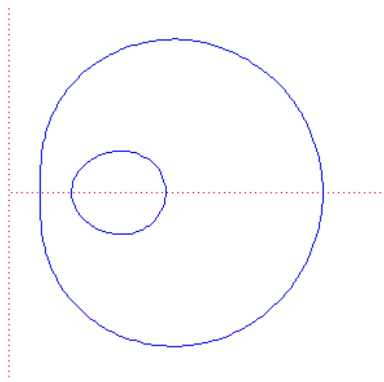
Problema 2: Curvas algebraicas: Folio de Descartes y Óvalos de Descartes

M.J. de la Puente

Definición de Óvalos de Descartes:

dados dos puntos S y T en el plano, y dadas constantes $a, m \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, se considera el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que

$$d(P, S) + md(P, T) = a.$$



Ecuación: sean (x, y) las coordenadas de P. Supongamos que $S = (0, 0)$ y $T = (c, 0)$. Entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} + m\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a$$

$$m\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$m^2 \left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) = a^2 + x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(m^2 - 1)(x^2 + y^2) - a^2 - 2m^2cx + m^2c^2 = -2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

y, elevando al cuadrado, llegamos a la ecuación

$$\left((1 - m^2)(x^2 + y^2) + a^2 + 2m^2cx - m^2c^2\right)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

ecuación de grado 4 en x, y, dependiente de los parámetros $c = d(S,T) \in \mathbb{R}$ y a, m. Obsérvese que, al haber elevado al cuadrado dos veces en las líneas anteriores, la ecuación obtenida describe, en realidad, el lugar geométrico de los puntos P tales que

$$d(P,S) \pm md(P,T) = \pm a.$$

¿ Son los óvalos de Descartes una curva irreducible? Equivalentemente, **¿es el polinomio f irreducible en $\mathbb{C}[x,y]$? La curva interior de los óvalos, ¿puede ser una elipse?**

Respuesta: el polinomio

$$f = \left((1-m^2)(x^2+y^2) + a^2 + 2m^2cx - m^2c^2\right)^2 - 4a^2(x^2+y^2) \in \mathbb{C}[x,y]$$

es bicuadrático en y, por lo que podemos escribir

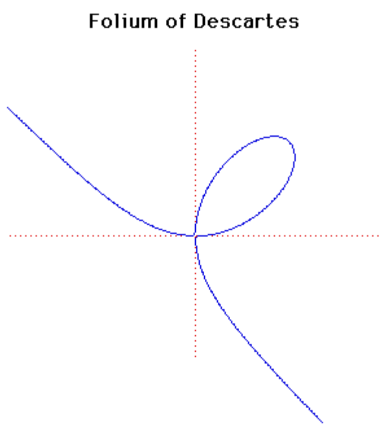
$$f = Ay^4 + By^2 + C$$

para ciertos polinomios A, B, C de grado ≤ 4 en x. Entonces

$$f = A(y^2 - s_1)(y^2 - s_2) = A(y - \sqrt{s_1})(y + \sqrt{s_1})(y - \sqrt{s_2})(y + \sqrt{s_2})$$

donde $s_1 = \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$, $s_2 = \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$ y $D = B^2 - 4AC$. Basta con comprobar que alguno de los siguientes $\sqrt{D}$, s_1, s_2, $\sqrt{s_1}$, $\sqrt{s_2}$ NO es polinomio en x para concluir que f es polinomio irreducible en $\mathbb{C}[x,y]$. Con ello concluimos que los óvalos de Descartes es curva irreducible y que en la gráfica no aparece una elipse.

Definición de folio Descartes: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$**. Tomaremos** $a = 1$**.**



Propiedades:

1. Es una **cúbica nodal**, es decir, es curva irreducible de grado 3, (por lo que admite, a lo sumo, un punto singular) y, en efecto, tiene un punto singular doble con tangentes distintas.

2. Su **hessiana** es otro *folio de Descartes* y sus puntos de inflexión (en el plano proyectivo complejo) son $Q_1 = (-1 : 1 : 0)$, $Q_\omega = (-1 : w : 0)$ y $Q_{\omega^2} = (-1 : w^2 : 0)$, donde $\omega = e^{2\pi i/3} = \cos 120 + i \operatorname{sen} 120 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

3. El folio de Descartes es curva racional, i.e., admite una parametrización por funciones racionales.

4. Toda cúbica nodal es proyectivamente equivalente al folio de Descartes (ver Prop. 6.2 pag. 230, [3]).

Soluciones:

1. Tomamos el polinomio $f = x^3 + y^3 - 3xy \in \mathbb{C}[x, y]$ y lo homogeneizamos, obteniendo $F = x^3 + y^3 - 3xyz \in \mathbb{C}[x, y, z]$. El polinomio F describe la curva proyectiva asociada al *folio*, que también llamaremos *folio*. Los puntos singulares de esta curva, denotada $V(F)$, son aquellos donde se anulan las tres derivadas parciales:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} x^2 - yz = 0 \\ y^2 - xz = 0 \\ -xy = 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} yz = 0 \\ y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ó} \begin{cases} x^2 = 0 \\ xz = 0 \\ y = 0 \end{cases} \simeq P = (0 : 0 : 1).$$

   Así pues, P es el único punto singular de la curva $V(F)$, y en el plano afín (dado por $z = 1$), P es el origen de coordenadas.

   Las rectas tangentes al folio $V(f)$ en el origen se obtienen igualando a cero la forma de menor grado de f:

$$xy = 0$$

   Obtenemos dos rectas distintas, que son los ejes coordenados. Concluimos que el folio, que no contiene rectas, es una **cúbica nodal**.

2. Sea F un polinomio homogéneo en tres variables. Es conocido que **hessiano** de F es el determinate de la matriz de derivadas parciales segundas de F

$$H(F) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{vmatrix}.$$

   Si $\mathcal{C} = V(F)$ es una curva algebraica proyectiva, se define la **curva hessiana** de $\mathcal{C}$, como la curva de los puntos que anulan $H(F)$ (supuesto $H(F)$ no nulo).

Es conocido que los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ y su curva hessiana son, o bien puntos singulares de $\mathcal{C}$, o bien inflexiones de $\mathcal{C}$.

Para $F = x^3 + y^3 - 3xyz$ obtenemos

$$H(F) = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 0 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 2x & -z & y \\ -z & 2y & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = -54(x^3+y^3+xyz).$$

La curva hessiana, de ecuación $x^3 + y^3 + xyz = 0$ es otro folio de Descartes (solo el coeficiente del término xyz ha cambiado; **¿cómo ha cambiado la gráfica?**). La intersección de ambas curvas viene dada por el sistema

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3xyz = 0 \\ x^3 + y^3 + xyz = 0 \end{cases} \simeq \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ xyz = 0 \end{cases} \simeq \{P, Q_1, Q_\omega, Q_{\omega^2}\},$$

En el último sistema anterior, si $x = 0$ ó $y = 0$ obtenemos el punto P, y si tanto x como y son no nulos, entonces $z = 0$ y podemos suponer $x = -1$, obteniendo la ecuación $y^3 = 1$, de donde salen los puntos Q_1, Q_ω y Q_{ω^2}.

Así pues, Q_1, Q_ω y Q_{ω^2} son las inflexiones del folio de Descartes. Solo uno de estos puntos, el $(-1 : 1 : 0)$, es real. Dicho punto NO está en el plano afín de partida (de ecuación $z = 1$), lo que se puede apreciar en gráfica: el punto en el infinito de la asíntota que apreciamos en el folio es una inflexión.

Referencias

[1] E. Arrondo, Apuntes de la asigantura Curvas Algebraicas (tomados por D. Gómez) `http://www.mat.ucm.es/~arrondo/calg.pdf`

[2] R. Moreno, Plücker y Poncelet: Dos modos de entender la geometría, Nivola, Col: la matemática en sus personajes, 2005

[3] M.J. de la Puente, Curvas algebraicas y planas, Serv. Pub. U. Cádiz, 2007

[4] M.J. de la Puente, Cómo obtener curvas algebraicas a partir de circunferencias, Sociedad Puig Adam, n.85, 2010