ERRATA p- 247-248

Sea $\mathcal{C}$ una cúbica proyectiva lisa, $O \in \mathcal{C}$ un punto de inflexión y consideremos en $\mathcal{C}$ la adición con O como punto base.

Dado $m \in \mathbb{N}$, consideremos puntos distintos $R_1, \ldots, R_{3m} \in \mathcal{C}$. Queremos demostrar que $R_1 + \cdots + R_{3m} = O$ si y solo si existe una curva de grado m que no contiene a $\mathcal{C}$ y pasa por $R_1, \ldots, R_{3m}$.

Razonaremos por inducción sobre m, observando que el caso $m = 1$ ha sido visto en teoría (p. 232) y el caso $m = 2$ ha sido visto en el ejercicio 8 de la p. 246.

Haremos la *hipótesis adicional* de que *todos los puntos que aparezcan serán distintos entre si.*

Sea L_1 (resp. L_2) la recta que une R_1 y R_2 (resp. R_3 y R_4) y sea T_1 (resp. T_2) el tercer punto de corte de L_1 (resp. L_2) con $\mathcal{C}$. Sea P el punto intersección de L_1 y L_2. Asimismo consideremos la recta L que une T_1 y T_2 y el tercer punto de corte de L con $\mathcal{C}$, que denotamos T_3. Sabemos que

$$R_1 + R_2 + T_1 = R_3 + R_4 + T_2 = T_1 + T_2 + T_3 = O$$

de donde se deduce que

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = T_3.$$

Así pues $R_1 + \cdots + R_{3m} = 0$ ($3m$ puntos) si y solo si $T_3 + R_5 + \cdots + R_{3m} = 0$ ($3m - 3$ puntos). Esto, junto con la hipótesis de inducción, reduce el ejercicio a demostrar que son equivalentes:

1. existe una curva $\mathcal{F}$ de grado m que no contiene a $\mathcal{C}$ y pasa por $R_1, \ldots, R_{3m}$ (son $3m$ puntos),

2. existe una curva $\mathcal{D}$ de grado $m - 1$ que no contiene a $\mathcal{C}$ y pasa por $T_3, R_5, \ldots, R_{3m}$ (son $3m - 3$ puntos).

Para empezar, veamos una demostración del caso $m = 2$, algo distinta de la ofrecida en el ejercicio 8. El método consiste en *quitar rectas*. Dado un punto Q, consideremos los sistemas lineales

$$\mathcal{T}_3 = S_3(T_1, T_2, T_3, R_1, \ldots, R_6),$$

$$\mathcal{T} = S_3(Q, T_1, T_2, T_3, R_1, \ldots, R_6),$$

$$\mathcal{T}_2 = S_2(R_1, \ldots, R_6),$$

$$\mathcal{T}_1 = S_1(T_3, R_5, R_6).$$

Supongamos que los puntos T_3, R_5, R_6 están alineados sobre la recta $\mathcal{D}$. Entonces $\mathcal{C}$ y $L_1 + L_2 + \mathcal{D}$ son dos curvas distintas de $\mathcal{T}_3$, por lo que $\dim \mathcal{T}_3 \geq 2$. Vamos a *quitar la recta* L. Para ello tomamos $Q \in L \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ y observamos que $\dim \mathcal{T} \geq \dim \mathcal{T}_3 - 1 \geq 1$. Por el teorema de Bézout (o, más concretamente, por el teorema 4.18),

$$\mathcal{T} = F\mathcal{T}_2,$$

donde F es una forma minimal para L. En particular, $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}_2 \geq 1$ y así, existe una cónica $\mathcal{F}$ que pasa por $R_1, \ldots, R_6$.

Recíprocamente, si existe una cónica $\mathcal{F}$ que pasa por $R_1, \ldots, R_6$ entonces las cúbicas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F} + L$ pertenecen a $\mathcal{T}_3$, por lo que $\dim \mathcal{T}_3 \geq 2$. *Vamos a quitar* $L_1 + L_2$. Para ello, sea Q un punto cualquiera de $L_1 \setminus \{P, T_1, R_1, R_2\}$. Por el teorema de Bézout (o, por el teorema 4.18 aplicado dos veces),

$$\mathcal{T} = F_1 F_2 \mathcal{T}_1$$

donde F_j es una forma minimal para L_j. Entonces $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}_1 \geq \dim \mathcal{T}_3 - 1 \geq 1$, lo que significa que los puntos T_3, R_5, R_6 están alineados.

Sea $m \geq 3$. Dados puntos $U_1, \ldots, U_{m-2}, Q_1, \ldots, Q_{m-1}$, consideremos los sistemas lineales

$$\mathcal{T}_{m+1} = S_{m+1}(T_1, T_2, T_3, R_1, \ldots, R_{3m}),$$
$$\mathcal{T} = S_{m+1}(Q_1, \ldots, Q_{m-1}, T_1, T_2, T_3, R_1, \ldots, R_{3m}),$$
$$\mathcal{T}' = S_{m+1}(U_1, \ldots, U_{m-2}, Q_1, \ldots, Q_{m-1}, T_1, T_2, T_3, R_1, \ldots, R_{3m}),$$
$$\mathcal{T}_m = S_m(R_1, \ldots, R_{3m}),$$
$$\mathcal{T}_{m-1} = S_{m-1}(T_3, R_5, \ldots, R_{3m}).$$

Evidentemente, ni rectas ni cónicas contienen a $\mathcal{C}$. Por otro lado sabemos que $\dim S_m = \binom{m+2}{2}$ y, si $m \geq 3$, las curvas de grado m que contienen a $\mathcal{C}$ están en biyección con S_{m-3}, formando un subespacio vectorial de S_m de dimensión $\binom{m-1}{2}$ y codimensión $\binom{m+2}{2} - \binom{m-1}{2} = 3m \geq 9$. Entonces $\dim \mathcal{T}_m \geq \binom{m+2}{2} - 3m = \binom{m-1}{2}$. Análogamente, $\dim \mathcal{T}_{m+1} \geq \binom{m}{2}$ y $\dim \mathcal{T}_{m-1} \geq \binom{m-2}{2}$. Además, las curvas de grado m que *no* contienen a $\mathcal{C}$ forman un abierto denso en S_m.

Supongamos que los puntos $T_3, R_5, \ldots, R_{3m}$ están sobre una curva $\mathcal{D}$ de grado $m-1$ que no contiene a $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C} + \mathcal{E}$ y $L_1 + L_2 + \mathcal{D}$ son dos curvas distintas de $\mathcal{T}_{m+1}$, para cualquier curva $\mathcal{E}$ de grado $m-2$, por lo que $\dim \mathcal{T}_{m+1} \geq \binom{m}{2} + 1$. Vamos a *quitar la recta* L. Para ello tomamos $Q_1, \ldots, Q_{m-1} \in L \setminus \{T_1, T_2, T_3\}$ y observamos que $\dim \mathcal{T} \geq \dim \mathcal{T}_{m+1} - m + 1 \geq \binom{m-1}{2} + 1$. Además, por el teorema de Bézout (o, por el teorema 4.18),

$$\mathcal{T} = F \mathcal{T}_m,$$

donde F es una forma minimal para L. Por consiguiente, $\dim \mathcal{T} = \dim \mathcal{T}_m$ y así, existen curvas $\mathcal{F}$ de grado m que pasan por $R_1, \ldots, R_{3m}$. Además, existen curvas $\mathcal{F}$ de grado m que pasan por $R_1, \ldots, R_{3m}$ y no contienen a $\mathcal{C}$, ya que $\dim \mathcal{T}_m > \binom{m-1}{2}$.

Si existe una curva $\mathcal{F}$ de grado m que pasa por $R_1, \ldots, R_{3m}$ y no contiene a $\mathcal{C}$, entonces las curvas $\mathcal{C} + \mathcal{E}$ y $\mathcal{F} + L$ pertenecen a $\mathcal{T}_{m+1}$, para cualquier curva $\mathcal{E}$ de grado $m-2$. De este modo tenemos $\dim \mathcal{T}_{m+1} \geq \binom{m}{2} + 1$. *Vamos a quitar* $L_1 + L_2$. Para ello, sean $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ puntos distintos en $L_1 \setminus \{P, R_1, R_2, T_1\}$ y $U_1, \ldots, U_{m-2}$ puntos distintos en $L_2 \setminus \{P, R_3, R_4, T_2\}$. Por el teorema de Bézout (o, por el teorema 4.18 aplicado dos veces),

$$\mathcal{T}' = F_1 F_2 \mathcal{T}_{m-1}$$

donde F_j es una forma minimal para L_j. Entonces $\dim \mathcal{T}' = \dim \mathcal{T}_{m-1}$. Por otro lado, $\dim \mathcal{T}' \geq \dim \mathcal{T}_{m+1} - 2m + 3 \geq \binom{m-2}{2} + 1$, lo que implica que los puntos $T_3, R_5, \ldots, R_{3m}$ están sobre una curva de grado $m-1$. Como $\dim \mathcal{T}_{m-1} > \binom{m-2}{2}$, también existe una curva de grado $m-1$, que no contiene a $\mathcal{C}$ y pasa por $T_3, R_5, \ldots, R_{3m}$.