MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2016–2017
Ejercicios
Hoja 3. Complementos de álgebra matricial

1. Sean $A, D \in \mathcal{M}_n$ con $D = \text{diag}\,(d_i)_{i=1}^n$. Encontrar las expresiones de DA, AD y $\det(D)$.

2. Si $v, w \in \mathbf{V}$, determinar v^*w y vw^*. ¿Es $\text{rk}(v^*w) = \text{rk}(vw^*)$?

3. Sean D y E matrices diagonales y λ un escalar. Demostrar que λD, $D+E$ y $DE = ED$ son matrices diagonales y determinarlas.

4. Sean A y B matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y λ un escalar. Demostrar que λA, $A+B$ y AB son matrices triangulares superiores (resp. inferiores) y determinar sus elementos diagonales y su determinante, cuando sea posible. ¿Es $AB = BA$?

5. (a) Demostrar que si D es una matriz diagonal e inversible, su inversa es también diagonal. Determinar D^{-1}.

   (b) Mostrar que si A es una matriz triangular superior (resp. inferior) e inversible, su inversa es también triangular superior (resp. inferior). Determinar los elementos diagonales de A^{-1}.

6. Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz triangular y normal entonces A es diagonal.

7. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$. Probar:

   a) $\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA)$,

   b) si $\text{sp}\,A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ entonces $\text{sp}(A^k) = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k\}$, $k \in \mathbb{N}$, luego $\varrho(A^k) = \varrho(A)^k$,

   c) si A es regular y $\text{sp}\,A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ entonces $\text{sp}(A^{-1}) = \{1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n\}$.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Probar que

$$\lambda \in \text{sp}(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in \text{sp}(\alpha A).$$

9. Demostrar que si A es triangular por bloques entonces

$$\text{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^{p} \text{sp}(A_{ii}).$$

siendo $A_{ii},\ i = 1, \dots, p$ los bloques de la diagonal de A. Deducir que el determinante de una matriz triangular por bloques es el producto de los determinantes de los bloques de su diagonal.

10. Generalizar los resultados del Problema 5 para matrices diagonales, triangulares superiores e inferiores, por bloques.

11. Demostrar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es una matriz hermítica definida positiva y se descompone en bloques, los bloques diagonales son matrices hermíticas y definidas positivas. Deducir que los elementos diagonales de A son números positivos, así como sus menores principales.

12. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica (resp. simétrica) definida positiva. Probar que existe $B \in \mathcal{M}_n$ hermítica (resp. simétrica) definida positiva tal que $A = B^2$ *[Raíz cuadrada de una matriz HDP].*

13. Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ descompuesta en bloques, donde A y D son matrices cuadradas y A es regular, se define el **complemento de Schur de** A **en** P como la matriz $D - CA^{-1}B$. Demostrar que $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ y concluir que $\det(P) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.