MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 2016–2017
Ejercicios
Hoja 5. Resolución de sistemas lineales: métodos iterativos

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demostrar:

   a) $|||A|||_F = +\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$,

   b) $\frac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_2 \leq |||A|||_1 \leq \sqrt{n}|||A|||_2$,

   c) $\frac{1}{\sqrt{n}}|||A|||_\infty \leq |||A|||_2 \leq \sqrt{n}|||A|||_\infty$,

   d) $\frac{1}{n}|||A|||_1 \leq |||A|||_\infty \leq n|||A|||_1$,

   e) $|||A|||_2 \leq |||A|||_F \leq \sqrt{n}|||A|||_2$,

   f) la desigualdad $|||AB|||_F \leq |||A|||_F|||B|||_F$ es equivalente a la desigualdad de Cauchy–Schwartz en el espacio vectorial de dimensión n^2.

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   estudiar la convergencia de los *métodos de Jacobi y Gauss–Seidel por puntos y por bloques* para A y B.

3. Se considera el *método iterativo* $u^{k+1} = Bu^k + c$ con u^0 vector dado.

   a) Demostrar que la sucesión $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estacionaria, cuando $\varrho(B) = 0$.

   b) Sea A una matriz triangular superior por bloques. Estudiar la convergencia de los *métodos de Jacobi, Gauss–Seidel y relajación* asociados a la descomposición por bloques de A.

   c) Ídem si A es triangular inferior.

4. La matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se dice de *diagonal estrictamente dominante* (DED) si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|, \forall i = 1, \ldots, n.$$

   Si A es una matriz DED, probar que

a) A es inversible,

b) el *método de Jacobi por bloques* para A es convergente.

c) el *método de relajación por bloques* para A es convergente, si $0 < w \leq 1$.

5.

a) Probar que si $0 < w \leq 1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \geq 1$, entonces $\left|\frac{1-w-\lambda}{\lambda w}\right| \geq 1$.

(**<u>Indicación</u>**: Utilizar que $|x-y| \geq |\,|x|-|y|\,|,\ x, y \in \mathbb{C}$).

b) Demostrar que si A es DED, el *método de relajación por puntos* para A es convergente, si $0 < w \leq 1$.

6. Demostrar que si A verifica

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|, \forall j = 1, \ldots, n,$$

entonces el *método de Jacobi por puntos* para A es convergente. *[OBS: A^t es DED].*

7. Sea A una matriz hermítica e inversible, $A = M - N$ con M inversible.

a) Se considera la sucesión $v^{n+1} = M^{-1}Nv^n$ con v^0 vector no nulo arbitrario. Probar que si la matriz $M^* + N$ es definida positiva entonces la sucesión $\{(v^n)^* A v^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente.

b) Demostrar que si $M^* + N$ es definida positiva y $\varrho(M^{-1}N) < 1$ entonces A es definida positiva.

8. *a*) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ DED con

$$a_{ii} > 0,\ i = 1, \ldots, n \ \text{ y } \ \mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}.$$

Utilizar el *teorema de los círculos de Gershgorin* para probar que sus autovalores son estrictamente positivos.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_n$ una matriz hermítica, DED con

$$a_{ii} > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Probar que el *método de relajación por bloques* para A es convergente si y sólo si $0 < w < 2$.

9. Sea $A \in \mathcal{M}_n$ escrita en la forma $A = M - N$ siendo $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz inversible y sea $B = M^{-1}N$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ se definen las matrices

$$M_\alpha = (1+\alpha)M,\ N_\alpha = M_\alpha - A \ \text{y} \ B_\alpha = M_\alpha^{-1}N_\alpha.$$

a) Demostrar que

$$B_\alpha = \frac{1}{1+\alpha}(B + \alpha I).$$

b) Probar la equivalencia

$$\lambda \in \mathrm{sp}(B) \Leftrightarrow \frac{\lambda+\alpha}{1+\alpha} \in \mathrm{sp}(B_\alpha).$$

c) Suponiendo que los autovalores de B verifican la relación

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 1,$$

demostrar que el método asociado a B_α converge para $\alpha > -\dfrac{1+\lambda_1}{2}$.

d) ¿Qué ocurre si $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1 > 1$?

e) Comprobar que el método asociado a B_α es, de hecho, un *método de relajación* de parámetro $w = \frac{1}{1+\alpha}$ aplicado al método asociado a B, en el sentido introducido en clase.

10. Sea $M = \begin{pmatrix} A & | & B \\ -- & & -- \\ B^* & | & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz hermítica definida positiva (HDP) y supongamos que el bloque A es inversible. Demostrar que el complemento de Schur de A en M es HDP.

11. *Examen Febrero 2015/16.* Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{K})$, con $a_{11}a_{22} \neq 0$. Escribir las matrices de los *métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel*, calcular sus polinomios característicos, espectros y radios espectrales. Demostrar que ambos métodos convergen si y sólo si $|a_{12}a_{21}| < |a_{11}a_{22}|$.

12. *Examen Septiembre 2015/16.* Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$, con $a_{22} \neq 0$. Escribir las matrices J y $\mathcal{L}_1$ de los *métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel*, calcular sus polinomios característicos, espectros y radios espectrales. ¿Qué valores de a_{22} hacen que ambos métodos converjan? A continuación, queremos resolver el sistema lineal $Au = b$, con $b \in M_{2\times 1}(\mathbb{K})$ dado, por el *método de Jacobi*: tomando $u^0 = b$, se genera una sucesión de vectores $\{u^k\}_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. ¿Es cierto que $u^2 = (J^2 + J + I)b$? Demostración o contraejemplo.