

Métodos Numéricos, Grupo C
Números complejos. Repaso

1. Hallar el módulo (o valor absoluto) y el argumento de cada uno de los siguientes números:

a) $3 + 4i$.

b) $(3 + 4i)^{-1}$.

c) $(1 + i)^5$.

d) $\sqrt[3]{3 + 4i}$.

e) $|3 + 4i|$.

2. Resolver las ecuaciones siguientes

a) $x^2 + ix + 1 = 0$.

b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

d)
$$\begin{cases} ix - (1 + i)y = 3, \\ (2 + i)x + iy = 4. \end{cases}$$

e) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

3. Describir el conjunto de todos los números complejos z tales que

a) $\bar{z} = -z$.

b) $\bar{z} = z^{-1}$.

c) $|z - a| = |z - b|$, con a, b complejos dados.

d) $|z - a| + |z - b| = c$, con a, b, c complejos dados.

e) $|z| < 1 - \Re(z)$, donde $\Re(z)$ es la parte real de z .

4. Demostrar que $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ e interpretar geométricamente.

5. Calcular

a) $(1 + 2i)^3$.

b) $\frac{5}{-3+4i}$.

c) $\left(\frac{2+i}{3-2i}\right)^2$.

d) $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

6. Si $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$), hallar las partes real e imaginaria de

$$z^4, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

7. Demostrar que

$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1, \quad \left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$$

para todas las elecciones de signos.

8. Calcular

$$\sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}, \quad \sqrt{1+i}, \quad \sqrt{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

9. Hallar todos los valores de

$$\sqrt[4]{-1}, \quad \sqrt[4]{i}, \quad \sqrt[4]{-i}.$$

10. Calcular las raíces de la ecuación $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$.

11. Hallar las raíces, con su multiplicidad, del polinomio $x^{13} - x^{11} + x^2 - 1$.