Soluciones a los problemas del Examen Final de Curvas Algebraicas. Grupo B. 2 de Febrero de 2010

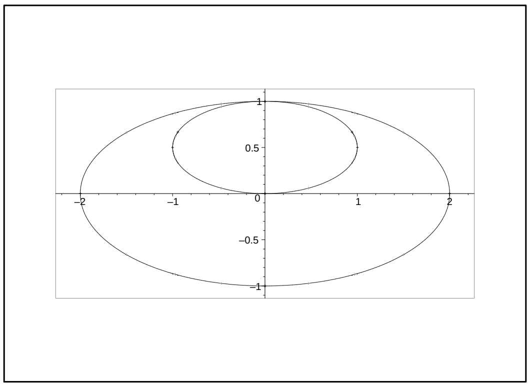

FIGURA 1. Cónicas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

1. (1.5 puntos) Se consideran las cónicas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^2$ de ecuaciones $X^2 + 4Y^2 - 4 = 0, X^2 + 4Y^2 - 4Y = 0$, respectivamente.

a. Hallar la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en el punto P de coordenadas $(0, 1)$.

b. Hallar las cónicas degeneradas del haz generado por $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ en el plano proyectivo. Hallar los puntos base de dicho haz.

La multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ en P es el orden de la resultante de $f = X^2 + 4Y^2 - 4$ y $g = X^2 + 4Y^2 - 4Y$ respecto de Y, por la proposición 3.32,[2]. Por otro lado, $g = f + r$, con $r = -4Y + 4$, de modo que $R^Y_{f,g} = 4R^Y_{f,r}$, por el corolario B.21, [2]. Ahora bien,

$$R^Y_{f,r} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & X^2 - 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 16X^2$$

es un polinomio de orden 2, por lo que $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 2$.

Una cónica $\mathcal{E}$ del haz tiene ecuación $\lambda(X^2 + 4Y^2 - 4Z^2) + \mu(X^2 + 4Y^2 - 4YZ) = 0$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ no ambos nulos. $\mathcal{E}$ será degenerada si y solo si se anula el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 4(\lambda + \mu) & -2\mu \\ 0 & -2\mu & -4\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)^2.$$

Hay dos cónicas degeneradas en el haz: una tiene ecuación $Z(Y - Z) = 0$ y corresponde a $1 = \lambda = -\mu$, y la otra $X^2 + 4(Y - Z)^2 = (X + 2(Y - Z)i)\,(X - 2(Y - Z)i) = 0$, asociada a $1 = \lambda, -2 = \mu$.

El punto P, contado con multiplicidad dos, está en la base del haz. Los restantes puntos se obtienen cortando cualesquiera dos elementos del haz, por ejemplo $X^2+4Y^2-4Z^2=0$ y $Z(Y-Z)=0$. Se obtienen fácilmente los puntos $Q_+=(2i:1:0)$ y $Q_-=(-2i:1:0)$, por lo que la base del haz es $2P+Q_++Q_-$.

Otra forma de razonar es la siguiente. De la gráfica deducimos que $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C},\mathcal{D})\geq 2$, ya que las cónicas comparten recta tangente en P. Por otro lado, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tienen los mismos puntos en el infinito: estos son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} X^2+4Y^2 &= 0, \\ Z &= 0, \end{cases}$$

esto es $Q_+=(2i:1:0)$ y $Q_-=(-2i:1:0)$. Ahora, aplicando el teorema de Bézout (teorema 2.47 [2])) a las completadas proyectivas $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ deducimos que $\mathrm{mult}_P(\mathcal{C},\mathcal{D})=2$ y que la base del haz es $2P+Q_++Q_-$.

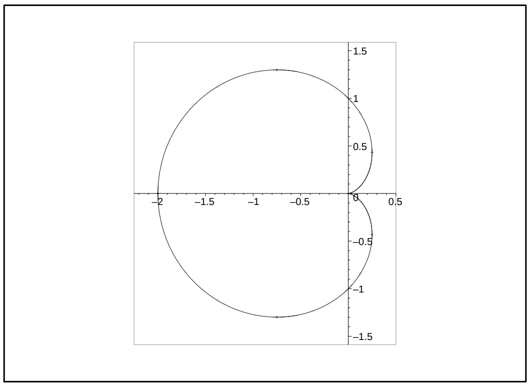

FIGURA 2. Cardioide.

2. (1 punto) La curva *cardioide* tiene ecuación $(X^2+Y^2+X)^2-X^2-Y^2=0$. Hallar la ecuación de una recta bitangente así como los puntos de intersección de ambas.

Una recta L es bitangente a la cardioide $\mathcal{C}$ si existen puntos lisos distintos $P,Q\in\mathcal{C}$ que comparten recta tangente. A la vista de la gráfica, vamos a buscar una bitangente vertical y por la derecha, i.e., de ecuación $X=c$, con $0<c<0{,}5$. Desarrollamos el polinomio $f=(X^2+Y^2+X)^2-X^2-Y^2$, agrupando los términos en la variable Y, obteniendo la expresión bicuadrática

$$f=Y^4+Y^2(2X^2+2X-1)+X^4+2X^3=0.$$

Buscamos ahora un valor de X que proporcione dos raíces dobles a esta ecuación. Aplicando la fórmula conocida para la ecuación de segundo grado

$$Y^2 = \frac{-2X^2 - 2X + 1 \pm \sqrt{1-4X}}{2}.$$

El discriminante debe ser nulo, i.e., $X = \frac{1}{4}$, de donde $Y^2 = \frac{3}{16}$ luego $Y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$. Por tanto la recta buscada tiene ecuación $X = \frac{1}{4}$ y los puntos de contacto son $Q_+ = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $Q_- = (\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$.

3. (1.5 puntos) Una curva nodal $\mathcal{C}$ de grado d tiene todos sus puntos singulares sobre cierta cúbica $\mathcal{D}$. Determinar el máximo valor posible d. Dar un ejemplo de $\mathcal{C}$, para dicho d máximo.

Una curva nodal de grado d es irreducible y tiene $\binom{d-1}{2}$ nodos (i.e., puntos dobles ordinarios) y estos son todos sus puntos singulares. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ tienen alguna componente en común, entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y $d \leq 3$. Supongamos ahora que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ no tienen componentes en común. Aplicando el teorema de Bézout y la desigualdad fundamental (teoremas 2.47 y 3.41,[2]) obtenemos la desigualdad

$$3d \geq \binom{d-1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = d^2 - 3d + 2,$$

o equivalentemente $0 \geq d^2 - 6d + 2$. Debemos pues averiguar para qué naturales $d \in \mathbb{N}$, la parábola de ecuación $Y = d^2 - 6d + 2$ toma valores negativos. Sus raíces son $r_\pm = 3 \pm \sqrt{7}$, que satisfacen $0 < r_- < 1$ y $5 < r_+ < 6$. Además esta parábola es convexa, sobre el cuerpo de los números reales. Por todo ello, $Y \leq 0$ si y solo si $1 \leq d \leq 5$ y el máximo valor es $d = 5$. Entonces la curva $\mathcal{C}$ tiene $\binom{4}{2} = 6$ nodos y, efectivamente, existen (infinitas) cúbicas que pasan por dichos 6 puntos del plano. Nótese que si tomásemos $d \geq 6$, la curva $\mathcal{C}$ tendría $s = \binom{d-1}{2} \geq 10$ nodos y no está garantizado que por s puntos del plano pase una cúbica.

Como ejemplo, tomamos la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $T_5(X) = T_4(Y)$ que, según sabemos, es nodal de grado 5, donde T_n denota el polinomio de Tchebychev n–simo (definido recursivamente por $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$); ver [1].

4. (1.5 puntos) Demostrar que las inflexiones de *lemniscata de Huygens*, de ecuación $X^4 + Y^2 - X^2 = 0$, se encuentran sobre las rectas $X = \pm\sqrt{2}iY$. Deducir que se trata de puntos complejos no reales. ¿Cuántos hay?

Es fácil calcular los puntos singulares de la clausura proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$: estos son $P_3 = (0:0:1)$ (en $\mathcal{C}$) y $P_2 = (0:1:0)$ (en el infinito).

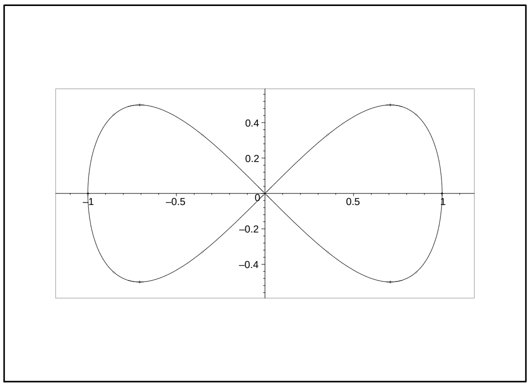

FIGURA 3. Lemniscata de Huygens.

La inflexiones son los puntos lisos de la lemniscata $\mathcal{C}$ que están en la curva hessiana. Homogeneizando, buscamos las soluciones del sistema

$$\begin{cases} X^4 + Y^2Z^2 - X^2Z^2 &= 0, \\ Z^2(2X^4 + 6X^2Y^2 + X^2Z^2 - Y^2Z^2) &= 0, \end{cases}$$

distintas de P_2 y P_3, donde $F = X^4 + Y^2Z^2 - X^2Z^2$ y $H(F) = \det D_2(F) = -24Z^2(2X^4 + 6X^2Y^2 + X^2Z^2 - Y^2Z^2)$. Hacemos $Z = 1$ en el sistema anterior y sustituyendo $X^2 - Y^2$ por X^4 llegamos a $X^2(X^2 + 2Y^2) = 0$. Si $X = 0$ obtenemos el punto $(0,0)$ (esto es, P_3) de $\mathcal{C}$, que es singular. En otro caso, $X^2 + 2Y^2 = 0$, lo que nos dice que las inflexiones de $\mathcal{C}$ pertenecen a las rectas indicadas. Dichas inflexiones tiene coordenadas $(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \pm\frac{i\sqrt{3}}{2})$. Se trata de cuatro puntos complejos no reales, por lo que dichos puntos no aparecen en la gráfica.

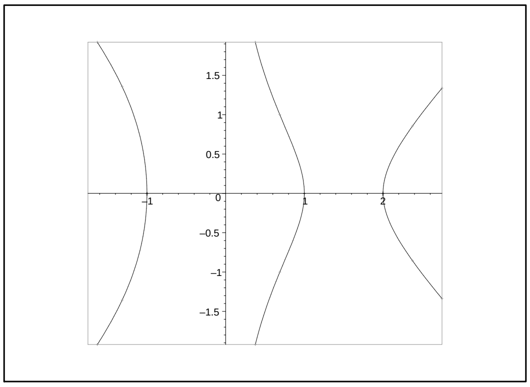

FIGURA 4. Cúbica $X^3 - 2X^2 - X + 2 - XY^2 = 0$.

5. (1.5 puntos) Se considera la cúbica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definida por la forma $F = X^3 - 2X^2Z - XZ^2 + 2Z^3 - XY^2$. Comprobar que el punto O

de coordenadas $(0:1:0)$ es una inflexión en $\mathcal{C}$. Se considera la adición en $\mathcal{C}$ con O como punto base. Hallar Q_1+Q_2, donde $Q_1=(1:0:1)$ y $Q_2=(2:0:1)$.

Para ver que O es una inflexión de $\mathcal{C}$, deshomogeneizamos F respecto de Y y aplicamos el lema del contacto, lema 3.48, [2], obteniendo $f_2 = X^3-2X^2Z-XZ^2+2Z^3-X = 2Z^3+X(-1+X^2-2XZ-Z^2)$. Esto prueba que la recta tangente a $\mathcal{C}$ en O tiene ecuación $X=0$ y que el contacto de $\mathcal{C}$ en O es 3, por lo que O es una inflexión de $\mathcal{C}$.

Ahora, Q_1+Q_2 es $-Q_3$, donde Q_3 es el tercer punto de corte de L_{Q_1,Q_2} con $\mathcal{C}$. La recta L_{Q_1,Q_2} tiene ecuación $Y=0$ y fácilmente se calcula que Q_3 tiene coordenadas $(-1:0:1)$. Además, $-Q_3$ es el tercer punto de corte de L_{O,Q_3} con $\mathcal{C}$. La recta L_{O,Q_3} tiene ecuación $X+Z=0$ que tiene multiplicidad de intersección 2 con $\mathcal{C}$ en Q_3. En otras palabras, L_{O,Q_3} es la tangente a $\mathcal{C}$ en Q_3 y $-Q_3$ es el propio Q_3. De modo que $Q_1+Q_2=Q_3=-Q_3=(-1:0:1)$.

Todo lo anterior se aprecia en la gráfica de $\mathcal{C}$ en el plano afín XY: los puntos $Q_1,Q_2,Q_3\in\mathcal{C}$ están alineados, por lo que $Q_1+Q_2+Q_3=O$, luego $Q_1+Q_2=-Q_3$. Además la recta tangente a $\mathcal{C}$ en Q_3 es vertical en el plano afín, luego pasa por O (punto en el infinito), luego $-Q_3=Q_3$. En particular, $2Q_3=O$. Análogamente se puede ver que $2Q_1=2Q_2=O$.

Bibliografía

[1] Gerd Fischer, *Plane algebraic curves*, Traducción de Leslie Kay al inglés del original en alemán de 1994, AMS, Providence, RI, 2001.

[2] María Jesús de la Puente, *Curvas algebraicas y planas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2007.