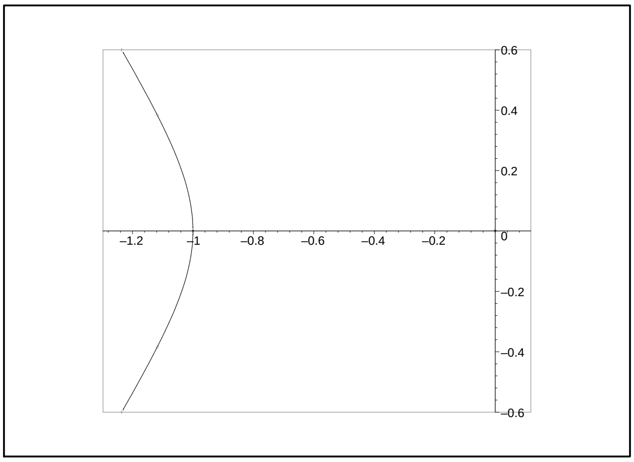
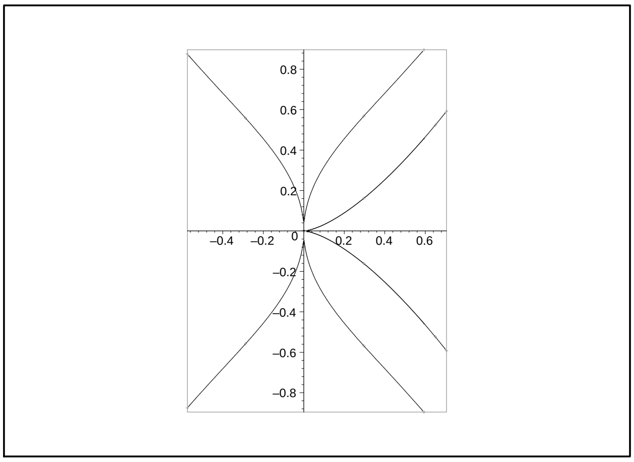
Ejercicios de Curvas Algebraicas. 12 de Abril de 2011

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.



1. Hallar una parametrización racional de la curva de ecuación $Y^2 + X^3 + X^2 = 0$.



2. Calcular la multiplicidad de intersección en el origen de las curvas $\mathcal{C} : (Y^2 - X^3 - X)(Y^2 + X^3 + X) = 0$ y $\mathcal{D} : Y^2 - X^3 = 0$. Hallar los puntos en el infinito de $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{D}$ y la multiplicidad de intersección en los mismos. ¿Cuántos puntos distintos hay $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$? Razonar la respuesta.

SOLUCIONES

1. Trabajaremos en el plano afín $\mathbb{C}^2$. Del polinomio que define la curva deducimos que el origen $P = (0, 0)$ tiene multiplicidad dos. Pensando en el teorema de Bézout (para recta y cúbica) y la desigualdad fundamental, consideramos el haz $\mathcal{H}$ de rectas que pasan por P. Además de la recta $X = 0$, en $\mathcal{H}$ tenemos las rectas $L_a : Y = aX$, con $a \in \mathbb{C}$. Intersecando L_a con la curva dada, obtenemos $a^2X^2 + X^3 + X^2 = (a^2 + X + 1)X^2 = 0$. Si $X^2 = 0$ se trata del punto P. Por otro lado, puede ocurrir que $a^2 + X + 1 = 0$, de donde se deduce $X = -a^2 - 1$ e $Y = -a^3 - a$, con $a \in \mathbb{C}$. Esta es la parametrización racional buscada.

2. Trabajaremos en el plano afín $\mathbb{C}^2$. El origen $P = (0, 0)$ es un punto doble en $\mathcal{D}$ con cono tangente $Y^2 = 0$ (recta doble $Y = 2$).

La curva $\mathcal{C}$ posee dos componentes irreducibles: trabajemos con cada una por separado. La componente $\mathcal{C}_1 : Y^2 - X^3 - X = 0$ es lisa en P con recta tangente $X = 0$. Por la desigualdad fundamental, la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{D}$ en P es 2. Del mismo modo, la componente $\mathcal{C}_2 : Y^2 + X^3 + X = 0$ es lisa en P con tangente $X = 0$ y la multiplicidad de intersección de $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{D}$ en P es, de nuevo, 2. Por tanto,

$$\mathrm{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = 2 + 2 = 4.$$

Pasemos ahora al plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. El único punto de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}$ en el infinito es $P_2 = (0 : 1 : 0)$, ya que la única solución de cualquiera de los sistemas

$$\begin{cases} Y^2Z - X^3 - XZ^2 = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y^2Z + X^3 + XZ^2 = 0, \\ Z = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y^2Z - X^3 = 0, \\ Z = 0, \end{cases}$$

es $X = Z = 0$. Deshomogeneizando respecto de Y, el punto P_2 pasa a tener coordenadas $(0, 0)$ y debemos trabajar con los polinomios

$$f_1 = Z - X^3 - XZ^2, \qquad f_2 = Z + X^3 + XZ^2$$
$$g = Z - X^3.$$

El origen es liso con recta tangente $Z = 0$ tanto en $\mathtt{V}(f_1)$ como en $\mathtt{V}(f_2)$ y $\mathtt{V}(g)$. La desigualdad fundamental nos dice que $\mathrm{mult}_{P_2}(\mathtt{V}(f_j), \mathtt{V}(g)) > 2$, para $j = 1, 2$.

Calculamos entonces la resultante $R^Z_{f_1,g}$ que, por el lema de sustitución, vale $-X^7$. Por otro lado, la resultante $R^Z_{f_2,g}$ vale $2X^3 + X^7$. Los órdenes respectivos son 7 y 3, de donde deducimos que

$$\mathrm{mult}_{P_2}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) = 7 + 3 = 10.$$

Por el teorema de Bézout, las curvas $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ se cortan en $(3+3) \times 3 = 18$ puntos, contados con multiplicidad. Falta por hallar $18 - 4 - 10 = 4$ puntos en $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$, contados con multiplicidad, todos los cuales están en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Un cálculo sencillo nos proporciona cuatro puntos complejos no reales distintos en $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{D}$: $(\frac{i}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{-i}{2\sqrt{2}}})$ y $(\frac{-i}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{i}{2\sqrt{2}}})$. En resumen, hay cinco puntos distintos en $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.