Examen Final de Curvas Algebraicas. Grupo B. 20 de Junio de 2011

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.

Teoría. Duración: 45 minutos

1. (3 puntos) Desarrolla un tema del curso de tu elección aportando, de modo ordenado y coherente, sus definiciones, resultados principales y ejemplos.

Examen Final de Curvas Algebraicas. Grupo B. 20 de Junio de 2011

Problemas. Duración: 3 horas

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.

Notación: $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$.

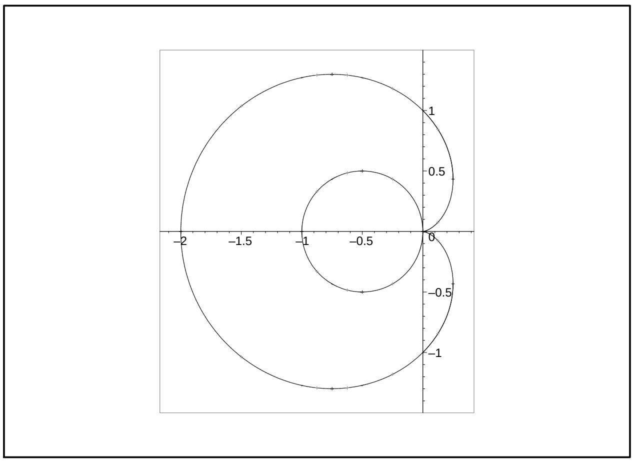

FIGURA 1. Cardioide y circunferencia.

2. (3 puntos) La curva $\mathcal{C}$ de ecuación $(X^2+Y^2+X)^2-X^2-Y^2 = 0$ es una *cardioide* (ver figura 1). Se considera su clausura proyectiva $\overline{\mathcal{C}}$. Se pide:

a. Sea $i = \sqrt{-1}$. Demostrar que el punto P_i, de coordenadas $(i : 1 : 0)$, es doble no ordinario en $\overline{\mathcal{C}}$, con tangente $2iX + 2Y + iZ = 0$. ¿ Qué se puede decir del punto P_{-i}, de coordenadas $(-i : 1 : 0)$?

b. Se considera la circunferencia $\mathcal{D}$ de centro $(-1/2, 0)$ y radio $1/2$ y su clausura proyectiva $\overline{\mathcal{D}}$. Hallar la multiplicidad de intersección de $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ en cada punto del plano proyectivo complejo.

c. ¿Es $\mathcal{C}$ racional? ¿Por qué?

3. (1 punto) Hallar la curva dual de $\mathtt{V}(Y^2Z + X^3)$.

4. (3 puntos) Se considera la familia de polinomios cúbicos $f_\lambda = (X + 1)XY + \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

a. Hallar la base $\mathcal{B}$ del haz asociado a la familia anterior. Para cada punto de $\mathcal{B}$, determinar cómo es una cúbica genérica del haz en dicho punto.

b. ¿Es el punto $P_1 = (1 : 0 : 0)$ punto de inflexión en una cúbica genérica del haz? ¿Por qué?

c. Hallar todas las cúbicas reducibles del haz y dibujarlas.

d. ¿Qué cúbica del haz pasa por $(1 : 1 : 1)$? Dibújala.

SOLUCIONES

2.

a. Las derivadas parciales de
$$F = (X^2 + Y^2 + XZ)^2 - (X^2 + Y^2)Z^2$$
son, salvo factor constante,
$$F_X = (X^2 + Y^2 + XZ)(2X + Z) - XZ^2,$$
$$F_Y = (X^2 + Y^2 + XZ)2Y - YZ^2,$$
$$F_Z = (X^2 + Y^2 + XZ)X - (X^2 + Y^2)Z.$$
Los puntos singulares de $\overline{\mathcal{C}}$ son las soluciones del sistema
$$F_X = F_Y = F_Z = 0.$$
Se obtiene
$$\operatorname{Sing} \overline{\mathcal{C}} = \{P_3 = (0:0:1), P_i, P_{-i}\}.$$
La matriz de derivadas de orden dos de F, evaluada en P_i vale, salvo factor constante,
$$\begin{pmatrix} -4 & 4i & -2 \\ 4i & 4 & 2i \\ -2 & 2i & -1 \end{pmatrix}.$$
Todas las columnas de dicha matriz son proporcionales entre si, luego su rango es uno. Entonces es fácil comprobar que la ecuación $(X, Y, Z)^t D_2(F)_{P_i}(X, Y, Z) = 0$ se expresa como $(2iX + 2Y + iZ)^2 = 0$, luego es una recta doble.

Por conjugación, en P_{-i} ocurre algo parecido: es un punto doble no ordinario en $\overline{\mathcal{C}}$, con tangente $-2iX + 2Y - iZ = 0$.

b. La ecuación de $\mathcal{D}$ es $X^2+Y^2+X = 0$ y es inmediato comprobar que $\overline{\mathcal{D}}$ pasa por los tres puntos singulares de $\overline{\mathcal{C}}$. Las rectas tangentes a $\overline{\mathcal{D}}$ en P_3,P_i y P_{-i} tienen ecuaciones
$$X = 0, \quad 2iX + 2Y + iZ = 0, \quad -2iX + 2Y - iZ = 0,$$
respectivamente. El cono tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ en P_3 tiene ecuación $Y^2 = 0$. Por la *desigualdad fundamental* tenemos
$$\operatorname{mult}_{P_3}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) = 2 \times 1 = 2,$$
$$\operatorname{mult}_{P_i}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) > 2 \times 1 = 2,$$
$$\operatorname{mult}_{P_{-i}}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) > 2 \times 1 = 2.$$
Por el *teorema de Bézout*, las curvas $\overline{\mathcal{C}}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ se cortan en $4\times 2 = 8$ puntos, contados con multiplicidad. Se deduce que
$$\operatorname{mult}_{P_i}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) = \operatorname{mult}_{P_{-i}}(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) = 3$$
y $\operatorname{mult}_P(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{D}}) = 0$, para todo $P \neq P_3, P_i, P_{-i}$.

c. Comprobemos ahora que F es irreducible. La forma F tiene grado dos en Z y se expresa como

$$F = Z^2(-Y^2) + 2ZX(X^2+Y^2) + (X^2+Y^2)^2 \in \mathbb{C}[X,Y][Z].$$

Como las raíces de este polinomio cuadrático son

$$\frac{-X(X^2+Y^2) \pm \sqrt{(X^2+Y^2)^3}}{-Y^2} \notin \mathbb{C}[X,Y],$$

entonces F no se puede descomponer.

Así pues, $\overline{\mathcal{C}}$ es una cuártica irreducible con tres puntos dobles, luego su deficiencia es nula y, por tanto $\overline{\mathcal{C}}$ es una curva racional. Se deduce que $\mathcal{C}$ también lo es.

3. Las derivadas parciales de $F = Y^2Z + X^3$ son

$$F_X = 3X^2, \quad F_Y = 2YZ, \quad F_Z = Y^2.$$

Buscamos una relación algebraica entre $A = 3X^2$, $B = 2YZ$ y $C = Y^2$, bajo la condición $F = 0$. Tenemos

$$A^3 = 27X^6 = 27Y^4Z^2 = 27B^2C/4.$$

Luego la curva dual tiene ecuación $4A^3 - 27B^2C = 0$.

Otra forma de resolver este problema pasa por usar una parametrización racional de la curva dada. Tenemos

$$X = -T^2S, \quad Y = T^3, \quad Z = S^3, \qquad (T:S) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Derivando respecto de T, S obtenemos

$$(-2TS, 3T^2, 0),$$
$$(-T^2, 0, 3S^2).$$

El producto vectorial de los vectores anteriores vale

$$(9T^2S^2, 6TS^3, 3T^4) = 3T(3TS^2, 2S^3, T^3).$$

Ahora bien, $(3TS^2, 2S^3, T^3)$ es una parametrización racional de la curva dual de la curva dada.

Es inmediato comprobar que $(3TS^2, 2S^3, T^3)$ satisface la ecuación $4A^3 - 27B^2C = 0$.

4.

a. El haz buscado es

$$\{F_{\mu,\lambda} = \mu(X+Z)XY + \lambda Z^3 : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

Su base $\mathcal{B}$ se obtiene cortado dos curvas cualesquiera del mismo. Resolvemos pues el sistema

$$(X+Z)XY = Z^3 = 0,$$

obteniendo los puntos $P_1 = (1:0:0)$ con multiplicidad 3 y $P_2 = (0:1:0)$ con multiplicidad 6.

Para estudiar las curvas en el punto P_1, deshomogeneizamos respecto de X, obteniendo

$$f_{\mu,\lambda} = \mu(1+Z)Y + \lambda Z^3.$$

El punto P_1, que pasa a tener coordenadas $(0,0)$, es liso en $\mathtt{V}(f_{\mu,\lambda})$, con recta tangente $Y=0$, siempre que $\mu \neq 0$.

Para estudiar las curvas en el punto P_2, deshomogeneizamos respecto de Y, obteniendo

$$g_{\mu,\lambda} = \mu(X+Z)X + \lambda Z^3.$$

El punto P_2, que pasa a tener coordenadas $(0,0)$, es un nodo (i.e., doble ordinario) en $\mathtt{V}(g_{\mu,\lambda})$, con cono tangente $(X+Z)X=0$, si $\mu \neq 0$.

b. El *lema de contacto* aplicado a $f_{\mu,\lambda}$ nos dice que el orden de contacto de $\mathtt{V}(f_{\mu,\lambda})$ en P_1 es tres, si $\mu \neq 0 \neq \lambda$. Luego P_1 es inflexión en la curva $\mathtt{V}(f_{\mu,\lambda})$ con tangente $Y=0$, si $\mu \neq 0 \neq \lambda$.

c. Es claro que si $\mu = 0$ o $\lambda = 0$, la curva asociada es reducible. Por otra parte, si $\mu \neq 0 \neq \lambda$, la forma $F_{\mu,\lambda}$ es lineal en Y e irreducible, luego la curva asociada es irreducible. Dibujar estas curvas es trivial.

d. Buscamos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ no ambos nulos tales que $\mu(1+1)1 + \lambda 1^3 = 0$. Basta tomar $\mu = 1$, $\lambda = -2$, obteniendo la cúbica de ecuación $(X+Z)XY - 2Z^3 = 0$. En la figura 2 tenemos la vista afín de dicha curva en $Z \neq 0$.

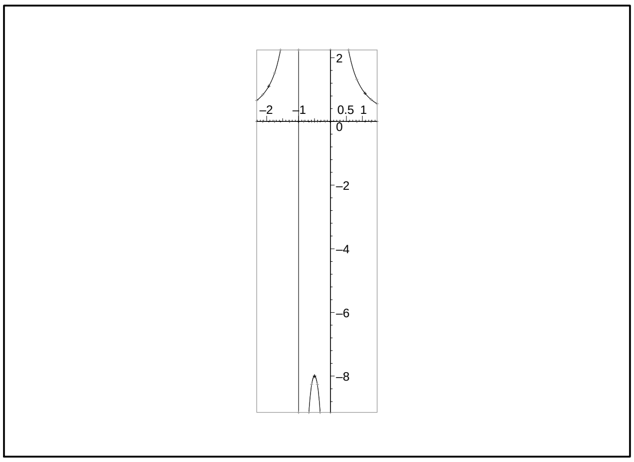

Figura 2. Las cúbicas de ecuaciones $(X+1)XY = 0$ y $(X+1)XY - 2 = 0$.