Examen Final de Curvas Algebraicas. Grupo B. 1 de Septiembre de 2011

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.
Teoría. Duración: 45 minutos

1. (3 puntos) Di todo lo que sepas sobre los puntos de inflexión de un curva algebraica. Pon ejemplos.

Examen Final de Curvas Algebraicas. Grupo B. 1 de Septiembre de 2011

Problemas. Duración: 3 horas

Todas las curvas se toman sobre el cuerpo de los números complejos.
Notación: $P_1 = (1 : 0 : 0)$, $P_2 = (0 : 1 : 0)$, $P_3 = (0 : 0 : 1)$.

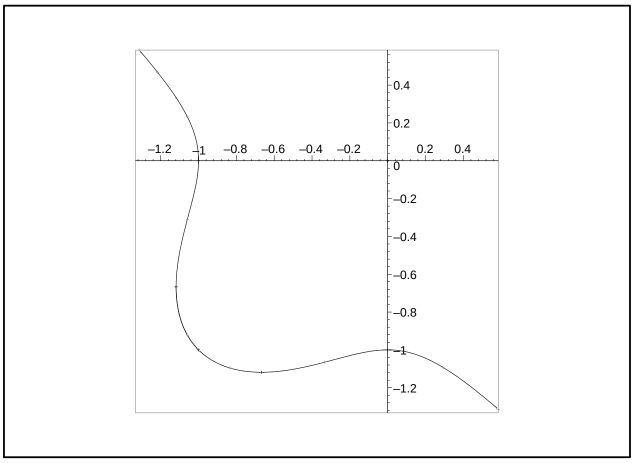

FIGURA 1. La cúbica de ecuación $X^3 + Y^3 + X^2 + Y^2 = 0$.

2. (3 puntos)

a. Hallar los pies de las tangentes a la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $X^3 + Y^3 + X^2Z + Y^2Z = 0$ trazadas desde el punto Q, de coordenadas $(1 : 1 : -3)$. ¿Cuántas rectas tangentes (reales o no) distintas se pueden trazar a $\mathcal{C}$ desde Q?

b. Calcular las multiplicidades de intersección de $\mathcal{C}$ y su curva polar respecto de Q en los puntos del plano proyectivo complejo.

c. Hallar la clase de $\mathcal{C}$. ¿Es Q genérico? ¿Por qué?

3. (1 punto) ¿Existen curvas irreducibles de grado 6 con 4 puntos triples? ¿Por qué?

4. (3 puntos)

a. Hallar la familia de cúbicas que tienen tangente $X = 0$ en P_3, tangente $Y = 0$ en P_1 y tangente $Z = 0$ en P_2. ¿Es un sistema lineal? ¿Por qué?

b. Demostrar que ninguna cúbica genérica entre las anteriores tiene una inflexión en P_k, $k = 1, 2, 3$.

c. ¿Cuántas cúbicas entre las anteriores tienen un punto singular en $P_4 = (1 : 1 : 1)$? Calcular el cono tangente en P_4.

SOLUCIONES

2.

a. Pongamos $F = X^3 + Y^3 + X^2Z + Y^2Z$. Es claro que el punto $P_3 = (0 : 0 : 1)$ es un nodo (i.e., es doble ordinario) con cono tangente formado por el par de rectas conjugadas $X + iY = 0$ y $X - iY = 0$, donde $i = \sqrt{-1}$. Es el único punto singular de $\mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es una cúbica irreducible (la forma que define $\mathcal{C}$ es lineal en Z).

El punto Q no pertenece a $\mathcal{C}$, pues $F(Q) = -4 \neq 0$. La forma $D(F, Q)$ vale $2(X + Y)Z$ y define la curva polar $\mathcal{P}_Q\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ respecto de Q. Al intersecar ambas curvas obtendremos, además de los puntos singulares de $\mathcal{C}$, los pies de las tangentes a $\mathcal{C}$ trazadas desde Q. El sistema

$$F = D(F, Q) = 0$$

se descompone en dos sistemas:

- $X^3 + Y^3 = Z = 0$, cuyas soluciones son $R_j = (\rho^{2j-1} : 1 : 0)$, donde $\rho = e^{\pi i/3}$, $j = 1, 2, 3$.
- $X^2Z + Y^2Z = X + Y = 0$, que equivale a $X = -Y$ y $2Y^2Z = 0$, cuyas soluciones son P_3 y $R_2 = (-1 : 1 : 0)$.

Nótese que $\rho^3 = -1$ luego

$$(\rho^{2j-1})^3 = \rho^{(2j-1)3} = (\rho^3)^{2j-1} = (-1)^{2j-1} = -1,$$

para $j = 1, 2, 3$. Además $\rho^6 = 1$.

Las distintas tangentes buscadas son las rectas L_{Q,R_j} con $j = 1, 2, 3$; L_{Q,R_2} es real y las otras dos son complejas conjugadas. En la figura tenemos la vista afín de la curva $\mathcal{C}$ obtenida deshomogeneizando respecto de Z. Ahí, el punto R_2 está en el infinito, por lo que la recta L_{Q,R_2} es una asíntota de dicha curva afín. El punto Q tendrá ahí coordenadas $(-1/3, -1/3)$.

Además, no es difícil comprobar que R_2 es una inflexión de $\mathcal{C}$, viendo que anula el hessiano de F.

b. La curva polar $\mathcal{P}_Q\mathcal{C}$ es un par de rectas, $L_1 : X + Y = 0$ y $L_2 : Z = 0$, que se cortan en el punto R_2.

Evaluamos el gradiente de F en los puntos R_j, obteniendo

$$(3\rho^2, 3, \rho^2 + 1) = (3\rho^2, 3, \rho), \qquad j = 1,$$
$$(3\rho^6, 3, \rho^6 + 1) = (3, 3, 2), \qquad j = 2,$$
$$(3\rho^{10}, 3, \rho^{10} + 1) = (3\rho^4, 3, \rho^5), \qquad j = 3,$$

luego las tangentes a $\mathcal{C}$ en R_j son

$$3\rho^2X + 3Y + \rho Z = 0, \qquad j = 1,$$
$$3X + 3Y + 2Z = 0, \qquad j = 2,$$
$$3\rho^4X + 3Y + \rho^5Z = 0, \qquad j = 3.$$

Para $j = 1, 3$ obtenemos rectas conjugadas, ya que $\overline{\rho^4} = \rho^2$ y $\overline{\rho^5} = \rho$.

Calculamos ahora las multiplicidades de intersección, usando la *desigualdad fundamental*:

$$\operatorname{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, \mathcal{P}_Q\mathcal{C}) = \operatorname{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, L_1) + \operatorname{mult}_{P_3}(\mathcal{C}, L_2) = 2 \times 1 + 0 = 2,$$
$$\operatorname{mult}_{R_1}(\mathcal{C}, \mathcal{P}_Q\mathcal{C}) = \operatorname{mult}_{R_1}(\mathcal{C}, L_1) + \operatorname{mult}_{R_1}(\mathcal{C}, L_2) = 0 + 1 \times 1 = 1,$$
$$\operatorname{mult}_{R_2}(\mathcal{C}, \mathcal{P}_Q\mathcal{C}) = \operatorname{mult}_{R_2}(\mathcal{C}, L_1) + \operatorname{mult}_{R_2}(\mathcal{C}, L_2) = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2,$$
$$\operatorname{mult}_{R_3}(\mathcal{C}, \mathcal{P}_Q\mathcal{C}) = \operatorname{mult}_{R_3}(\mathcal{C}, L_1) + \operatorname{mult}_{R_3}(\mathcal{C}, L_2) = 0 + 1 \times 1 = 1,$$

ya que $P_3 \notin L_2$ y $R_1, R_3 \notin L_1$. La suma de las multiplicidades anteriores es $6 = 3 \times 2 = 2 + 1 + 2 + 1$, según el *teorema de Bezóut*. Además, $\operatorname{mult}_P(\mathcal{C}, \mathcal{P}_Q\mathcal{C}) = 0$, para todo $P \neq P_3, R_j$.

c. El número de nodos de $\mathcal{C}$ es $\delta = 1$. La clase de $\mathcal{C}$ es $d(d-1) - 2\delta = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$, lo que significa que desde un punto genérico del plano se pueden trazar cuatro rectas tangentes a $\mathcal{C}$. Por tanto, Q no es genérico.

3. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva en las condiciones del enunciado. Sean R_j, $j = 1, 2, 3, 4$ puntos triples distintos en $\mathcal{C}$ y consideremos un punto más R_5 de $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{D}$ una cónica que pase por R_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y apliquemos el *teorma de Bézout* y la *desigualdad fundamental* a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Obtenemos

$$12 = 6 \times 2 \geq \sum_{j=1}^{5} \operatorname{mult}_{R_j}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \geq 4 \times 3 \times 1 + 1 \times 1 = 13.$$

Se concluye que una tal séxtica no existe.

Otra forma de razonar es la siguiente: sabemos que una curva $\mathcal{C}$ irreducible de grado d satisface la desigualdad

$$\sum_{j=1}^{s} \binom{r_j}{2} \leq \binom{d-1}{2},$$

donde s es el número de singularidades distintas de $\mathcal{C}$ y $r_1, \ldots, r_s$ son los órdenes de dichas singularidades. En el caso que nos ocupa tendríamos $12 = 4 \times \binom{3}{2} \leq \binom{5}{2} = 10$, lo cual es absurdo.

4.

a. Una forma cúbica en tres variables que se anule en P_k, con $k = 1, 2, 3$ es

$$F = dX^2Y + eX^2Z + fY^2X + gY^2Z + hZ^2X + iZ^2Y + jXYZ, \quad d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{C}.$$

Sus derivadas parciales valen

$$F_X = 2dXY + 2eXZ + fY^2 + hZ^2 + jYZ,$$
$$F_Y = dX^2 + 2fYX + 2gYZ + iZ^2 + jXZ,$$
$$F_Z = eX^2 + gY^2 + 2hZX + 2iZY + jXY.$$

El gradiente de F evaluado en P_k vale

$$\operatorname{grad}(F)_{P_1} = (0, d, e), \quad \operatorname{grad}(F)_{P_2} = (f, 0, g),$$
$$\operatorname{grad}(F)_{P_3} = (h, i, 0).$$

Deducimos que $i = f = e = 0$, luego

$$F = dX^2Y + gY^2Z + hZ^2X + jXYZ, \quad d, g, h, j \in \mathbb{C}.$$

Se trata de un sistema lineal de dimensión cuatro.

b. Si P_3 fuese una inflexión, el orden de contacto en P_3 sería tres. Deshomogeneizamos F respecto de Z, obteniendo el polinomio

$$dX^2Y + gY^2 + hX + jXY = X(h + jY + dXY) + gY^2$$

y, aplicando el *lema de contacto* vemos que el orden de contacto en P_3 es dos, cuando $g \neq 0$. Se razona análogamente para P_1 y P_2.

c. $F(P_4) = d+g+h+j = 0$, luego $j = -(d+g+h)$. El gradiente de F en P_4 vale $(d-g, g-h, h-d)$ luego P_4 es singular si y solo si $d = g = h$ y $j = -3d$. Podemos hacer $d = 1$. La única cúbica de la familia que tiene una singularidad en P_4 es

$$G = X^2Y + Y^2Z + Z^2X - 3XYZ = 0.$$

La matriz de derivadas de orden dos de G, evaluada en P_4 vale

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La ecuación $(X,Y,Z)^t D_2(G)_{P_4}(X,Y,Z) = 0$ se expresa como $2(X+aY+bZ)(X+Y/a+Z/b) = 0$, para ciertos $a, b \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Es sencillo deducir que $a = \mu$ y $b = \mu^2$, con $\mu = e^{2\pi i/3}$. El cono tangente a $\mathtt{V}(G)$ en P_4 es el par de rectas

$$(X + \mu Y + \mu^2 Z)(X + \mu^2 Y + \mu Z) = 0.$$