Examen de topología. Parte práctica

29-Junio-2005

1. En $\mathbb{R}^2$ se define la topología τ mediante las bases de entornos siguientes:

   $\mathcal{B}(a,b) = \{J_\epsilon(a,b); \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$ donde $J_\epsilon(a,b) = \{(x,b) \in \mathbb{R}^2, a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$ si $(a,b) \neq (0,0)$

   $\mathcal{B}(0,0) = \{H \subseteq \mathbb{R}^2;$ tales que $(0,0) \in H,$ y H cumple la condición (*)$\}$

   (*): Para toda recta horizontal L_h y toda recta vertical L_v, $H \cap L_h$ y $H \cap L_v$ son abiertos "usuales" de L_h y L_v respectivamente.

   - Comparar τ con la topología usual del plano $\mathbb{R}^2$.
   - Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es I-numerable, y si es separable.
   - Sea $M = \{a\} \times \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Hallar la topología inducida por τ en M.
   - Existe en $(\mathbb{R}^2, \tau)$ algún conjunto abierto y cerrado a la vez?
   - ¿Es $(\mathbb{R}^2, \tau)$ un espacio regular ?.
   - Sea $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$. Probar que el punto $(0,1)$ se puede separar de C mediante una función real continua (es decir existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con $f(C) = \{0\}$ y $f((0,1)) = 1$).
   - Probar que las "traslaciones" no son aplicaciones continuas.

2. Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el conjunto de las aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ está dotado de la topología usual).

   a) Estudiar si $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un subconjunto cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto, y uniforme.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > 0$. Estudiar si esta aplicación está en la clausura de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.