Problemas de topología. (Espacios regulares y completamente regulares.) Hoja 4.

28- III-2007

1. Probar que "ser regular" es una propiedad hereditaria, topológica y multiplicativa. Sin embargo un cociente de un espacio regular no es necesariamente regular.

2. Sea (X, τ) un espacio topológico de Hausdorff. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Para todo subconjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ existe una familia de entornos $\{U(x_1), ..., U(x_n)\}$ disjuntos dos a dos.

   b) Si X es tal que toda familia de abiertos disjuntos dos a dos es finita, entonces X es finito.

3. Probar que la linea de Sorgenfrey es regular.

4. Sea $J = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ y sea X el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión del cuadrado abierto $J \times J$ y los vértices $\{(0,0), (1,0)\}$. Se define en X una topología τ, cuyas bases de entornos en cada punto $z \in X$ están dadas por:

   - discos euclídeos abiertos centrados en z, si $z \in J \times J$;
   - los conjuntos $U_m = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : 0 < x < 1/2,\ 0 < y < 1/m\}$ $(m \in \mathbb{N})$, si $z = (0,0)$,
   - los conjuntos $V_n = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) : 1/2 < x < 1,\ 0 < y < 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, si $z = (1,0)$.

   Estudiar los axiomas de separación en este espacio.

5. (Examen del II-99)

   Sea X un espacio regular , $F \subset X$ compacto y U un abierto que contiene a F. Probar que existe un abierto V tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$

6. Probar que todo espacio no trivial conexo y completamente regular, o bien es unipuntual o bien tiene cardinal mayor o igual que la potencia del continuo, c.

7. Probar que todo espacio localmente compacto y T_2 es completamente regular.

8. Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto cerrado y R la relación de equivalencia en X que consiste en identificar todos los puntos de A. Probar:

   a) Si X es regular y T_1, el cociente X/R es de Hausdorff.

   b) Si X es normal, el espacio cociente es normal.

9. (Examen del 2004) Se considera el subconjunto $X = \bigcup_{t \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}} A_t$ de $\mathbb{R}^2$, siendo A_t la recta que pasa por el origen y con pendiente irracional t. Sea T la topología en X definida como:

$$G \in T \iff G \cap A_t \text{ es un abierto usual de la recta } A_t, \text{ para cada } t$$

   a) Comparar T con la topología inducida por la usual $T_u^2|_X$.

   b) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{(1, \sqrt{2} + \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Estudiar la topología inducida en el subconjunto $B = \{(x, y) \in X \mid x = 1\}$.

   c) Estudiar la convergencia de la sucesión $\{(\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{2}}{n^2})\}_{n \in \mathbb{N}}$.

   d) Estudiar si (X, T) es IAN, IIAN y separable.

   e) Estudiar si el espacio es $\mathbf{T}_2$ y regular.

10. (Examen 2004)

   a) Sea X un espacio de Hausdorff. Probar que si $K \subset X$ es compacto y x un elemento de $X \setminus K$, existen abiertos disjuntos A y B tales que $K \subset A$ y $x \in B$.

   b) Sea X un espacio completamente regular y T_1, $K \subset X$ compacto y $C \subset X$ un cerrado disjunto de K. Probar que existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(K) \subset [0, 1/2)$ y $f(C) = \{1\}$.

   c) A partir de la función f definida en b), obtener una función continua $g : X \to [0, 1]$ tal que $g(K) = \{0\}$ y $g(C) = \{1\}$.

11. Sea X el espacio $\mathbb{R}^2$ dotado de la topología τ, cuya base de entornos en cada punto $z \in \mathbb{R}^2$ está dada por discos euclídeos abiertos centrados en z, excluídos una cantidad finita de diámetros y unido de nuevo el conjunto unipuntual $\{z\}$.

   a) Estudiar si (X, τ) es regular o completamente regular.

   b) Probar que la topología inducida en una circunferencia cualquiera, por ejemplo S^1, coincide con la topología inducida por la usual del plano $\mathbb{R}^2$.

   c) Probar que (X, τ) es conexo.