Problemas de topología. (Espacios normales) Hoja 5

24-IV-2007

1. Probar que la linea de Sorgenfrey $\mathbb{R}_s$ es normal, pero $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ no lo es, (por tanto la normalidad no es propiedad multiplicativa).

2. Probar que todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal. Sin embargo la "normalidad" no es propiedad hereditaria.

3. Demostrar que si en un espacio topológico normal (X, T) se tienen tres cerrados C_0, C_1 y C_2 disjuntos dos a dos, entonces existe una función continua $f\colon (X,T) \to ([0,2], T_u|_{[0,2]})$ tal que $f(C_0) = 0$, $f(C_1) = 1$ y $f(C_2) = 2$.

4. Un espacio (X, τ) es *de Lindelöf* si todo recubrimiento abierto de X posee un subrecubrimiento numerable (No confundir con espacio numerablemente compacto). Probar las siguientes afirmaciones:

   - Si un espacio X verifica el segundo axioma de numerabilidad, X es de Lindelöf.
   - El plano de Niemytzki no es de Lindelöf.

5. (Examen del 2002) *Doble círculo de Alexandroff.* Se considera el espacio (X, T) donde $X = C_1 \cup C_2$, C_i es la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio i, $i = 1, 2$, y T es la topología generada por la base (utilizamos notación de los números complejos para los elementos de $\mathbb{R}^2$).

$$\mathcal{B} = \Big\{\{z\} \mid z \in C_2\Big\} \cup \Big\{V(z,\epsilon) \mid z \in C_1, \epsilon > 0\Big\}$$

$$V(z,\epsilon) = \Big\{w \in X \mid \operatorname{Arg}(w) \in (\operatorname{Arg}(z) - \epsilon, \operatorname{Arg}(z) + \epsilon)\Big\} - \Big\{2e^{i\operatorname{Arg}(z)}\Big\}.$$

   a) ¿Es (X, T) compacto?
   b) Estudiar los axiomas de separación de (X, T).
   c) Estudiar los axiomas de numerabilidad.
   d) Demostrar que no toda aplicación continua de C_2 (con la topología inducida de X) en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$.
   e) Probar que el doble círculo de Alexandroff es secuencialmente compacto. Probar que no es separable ni metrizable.

6. En $\mathbb{R}^2$ se considera la topología dada por la siguiente base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_- \cup \mathcal{B}_0$, donde:

$$\mathcal{B}_+ = \{D((x,y),\epsilon) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0, 0 < \epsilon < y\}$$

($D((x,y),\epsilon)$ es el disco abierto centrado en (x,y) y de radio ϵ);

$$\mathcal{B}_- = \{\{x\} \times (a,b) \mid x \in \mathbb{R}, a < b < 0\}$$

(es decir, $\mathcal{B}_-$ son intervalos verticales abiertos contenidos en el semiplano inferior);

$$\mathcal{B}_0 = \{A((a,0),\epsilon) \mid a \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\},$$

donde $A((a,0),\epsilon) = \{(x,y) \mid y > 0, (x-a)^2 + y^2 < \epsilon\} \cup \{(a,y) \mid -\epsilon < y \leq 0\}$

   (a) Estudiar los axiomas de numerabilidad de $(\mathbb{R}^2, T(\mathcal{B}))$.
   (b) Estudiar si es separable y de Lindelöf
   (c) Estudiar si $(\mathbb{R}^2, T(\mathcal{B}))$ es regular.
   (d) Se consideran los subconjuntos $C_1 = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq -1\}$, $C_2 = \{(x,y) \mid x > 0, y \leq -1\}$. ¿Existen dos abiertos disjuntos que los separen? La misma pregunta con los subconjuntos $D_1 = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x > 0, y \leq 0\}$.

7. Se dirá que un espacio topológico (X,τ) es *perfectamente normal* si es T_1 y para todo par de cerrados disjuntos no vacíos C_1, C_2 existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$. Probar: El espacio X es perfectamente normal sí y sólo si es normal, T_1 y todo cerrado de X es un G_δ (es decir, intersección numerable de abiertos).

8. (Examen del IX-99) ¿Es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un espacio normal? ¿Es perfectamente normal?

9. Se define la linea entrelazada como el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales, dotado de la topología τ cuyas bases de entornos $\beta(x)$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ son:

   - $\beta(x) = \{(a,b) \subset \mathbb{R}; a < x < b\}$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - $\beta(0) = \{(\leftarrow, -n) \cup (-r, r) \cup (n, \rightarrow); r \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}\}$

   Probar que la linea entrelazada es metrizable.

10. Probar que los siguientes espacios no son metrizables:

   a) El producto numerable de líneas, $\mathbb{R}^\omega$, dotado de la topología de cajas.
   b) El producto de una cantidad no numerable de líneas, $\mathbb{R}^c$ dotado de la topología producto.