Problemas de topología. Hoja 6

9-I-2007

1. Sea $\{A_i; i \in I\}$ una familia localmente finita de subconjuntos de un espacio topológico X. Probar que la familia $\{\overline{A_i}; i \in I\}$ también es localmente finita.

2. Probar la imagen continua de un espacio paracompacto no es necesariamente un espacio paracompacto.

3.
   - Probar que un subespacio cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto.
   - Sin embargo "ser paracompacto" no es propiedad hereditaria.
   - Si todo subespacio abierto de un espacio topológico X es paracompacto, entonces todo subespacio de X es paracompacto.

4. Probar que los siguientes espacios no son paracompactos:

   a) El plano de Niemytzki.

   b) El espacio $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la topología τ, cuya base de entornos en cada punto $z \in \mathbb{R}^2$ está dada por discos euclídeos abiertos centrados en z, excluídos una cantidad finita de diámetros y unido de nuevo el conjunto unipuntual $\{z\}$.

5. Probar que la lnea de Sorgenfrey, $\mathbb{R}_s$, es un espacio paracompacto. Sin embargo $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ no lo es, y por tanto "ser paracompacto" no es propiedad multiplicativa.

6. Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de los reales dotado de la topología cuyos abiertos son los subconjuntos de la forma $U \cup V$ dónde U es un abierto de $\mathbb{R}_u$ y V un subconjunto cualquiera de irracionales. Probar:

   - El espacio $\mathbb{S}$ es paracompacto.
   - El espacio $\mathbb{S}$ no es metrizable.