Problemas de topología. Hoja 7 (Espacios Funcionales)

15-Enero-2007

1. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $x \mapsto x/n$. Estudiar si la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge en las topologías de la convergencia puntual, de la convergencia uniforme en los compactos, y en la uniforme.

2. (del examen de II-06) Designamos por $C(X)$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en un espacio topológico X y por $C_p(X)$ el mismo espacio dotado de la topología de la convergencia puntual. Sea Y un subespacio de X, y sea $r : C(X) \to C(Y)$ la función "restricción", i.e. si $f \in C(X)$, $r(f) = f|Y$. Dar condiciones suficientes en X ó en Y de forma que :

   - La función r sea sobre.
   - La función r sea inyectiva.
   - ¿Es $r : C_p(X) \to C_p(Y)$ una función continua, sin condiciones adicionales en X ó en Y?

3. Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ (con las topologías usuales).

   a) Estudiar la clausura de $C(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto, uniforme y de las cajas.

   b) Sea $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la aplicación identidad. Encontrar, si se puede, abiertos de la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que separen g y el conjunto A de las aplicaciones constantes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

4. Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (con las topologías usuales).

   a) Estudiar si $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto, y uniforme.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > 0$. Estudiar si esta aplicación está en la clausura de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

5. (Del examen de Septiembre 2002)

   a) Estudiar la clausura y el interior del conjunto

   $$\mathcal{A} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ acotada}\}$$

   en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto.

   b) Estudiar la clausura y el interior del conjunto

   $$\mathcal{B} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua y acotada}\}$$

   en $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topología compacto-abierta.

6. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $\overline{d}(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$.

   a) Probar que $\overline{d}$ es una métrica en X y que las topologías asociadas a $\overline{d}$ y d coinciden.

   b) (X, d) es completo si y solo si $(X, \overline{d})$ es completo.

   c) Si un espacio métrico (X, τ) es compacto, todas las métricas que dan lugar a la topología τ son acotadas.

7. Sea $C(I, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas $f : I \to \mathbb{R}$ dotado de la métrica

   $$\rho(f, g) = sup\{|f(t) - g(t)|; t \in I\}.$$

   Estudia si las siguientes funciones son continuas :

   a) $\phi : C(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$.

   b) $\phi : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ definida por $f \mapsto \int_0^x f(t)dt$

8. Sea I el intervalo unidad $[0, 1]$ dotado de la topología usual. Consideremos en I^I la topología producto. Estudiar si son compactos los siguientes subconjuntos:

   - $A = \{f \in I^I \mid f(0) = 0\}$
   - $B = \{f \in I^I \mid f \text{ continua y } f(0) = 0\}$
   - $C = \{f \in I^I \mid f \text{ diferenciable y } f'(x) \leq 1, \forall x \in I\}$

9. Dado un espacio topológico (X, τ) la *k-extensión* de τ es una nueva topología $k(\tau)$ en X definida por:

   $C \subset X$ es cerrado en $k(\tau)$ sí y sólo si $C \cap K$ es cerrado en $\tau_{|K}, \forall K \subset X$ compacto en τ.

   a) Probar que $k(\tau)$ está bien definida.

   b) Si $\tau = k(\tau)$ se dirá que que (X, τ) es un *k-espacio*. Probar que todo espacio métrico y todo espacio localmente compacto es un k-espacio.

f) Sea (X, τ) un k-espacio y sea Y espacio topológico cualquiera. Si una aplicación $f : X \to Y$ es tal que $f_{|K}$ es continua para cualquier conjunto compacto $K \subset X$, probar que f es continua.

c) Sea X un k-espacio e (Y, d) un espacio métrico. Probar que $C(X, Y)$ es cerrado en el espacio Y^X dotado de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

10. Sea X un espacio localmente compacto, Y espacio topológico cualquiera y $C_{co}(X, Y)$ el espacio de las funciones continuas dotado de la topología compacto-abierta. Probar que la evaluación $e : C(X, Y) \times X \to Y$ definida por $(f, x) \mapsto f(x)$ es continua (el primer espacio tiene la topología producto).

11. Sea (Y, d) un espacio métrico completo y X un conjunto cualquiera.

    a) Probar que Y^X dotado de la topología uniforme $\tau_{\overline{\rho}}$ es un espacio completo.

    b) Si $Y = X = \mathbb{R}$ obtenemos como consecuencia de a) que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{\rho}})$ es un espacio métrico completo. ¿Es metrizable $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dotado de la topología producto?.

    c) Si X es un espacio compacto, probar que $C(X, Y)$ es un cerrado en el espacio Y^X dotado de la topología uniforme $\tau_{\overline{\rho}}$, y por tanto es completo.

12. Sea (Y, d) un espacio métrico, y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto de Y^X tal que para todo par de elementos $f, g \in \mathcal{F}$ el conjunto $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ es acotado. La siguiente fórmula
$$\rho(f, g) = sup\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$$
define una métrica en $\mathcal{F}$ que se denomina la métrica del supremo o simplemente métrica *sup*. Probar que si $\overline{\rho}$ designa la métrica uniforme en $\mathcal{F}$, $\overline{\rho}(f, g) = min\{1, \rho(f, g)\}$. Por tanto $\overline{\rho}$ y *sup* son métricas equivalentes.

13. Sea X un espacio topológico. Probar que el conjunto de las funciones reales acotadas, $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ es completo en la métrica *sup*.

14. Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \times Y \to Z$ una aplicación. Se define $F : Y \to Z^X$ f mediante $F(y) = f_y : x \mapsto f(x, y)$. Probar:

    - Si f es continua (respecto de la topología producto de $X \times Y$) , también f_y es continua para todo $y \in Y$.
    - Si X es localmente compacto, Z metrizable y en Z^X se considera la topología de la convergencia uniforme en los compactos τ_{ku} entonces, f continua implica F continua.
    - Sean $f_1, f_2 : X \to Z$ aplicaciones continuas. Probar que la existencia de una homotopía entre f_1 y f_2 equivale a decir que f_1 y f_2 se pueden unir mediante un camino en (Z^X, τ_{ku}).

15. Designemos por $\mathcal{H} = \{t_a; a \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de las traslaciones en $\mathbb{R}$, (i.e. $t_a(x) = x + a$). Probar que $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un subconjunto equicontinuo, pero no es puntualmente acotado.

16. Probar que si $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es equicontinuo la topología de la convergencia puntual restringida a $\mathcal{H}$ coincide con la restricción de la topología compacto-abierta.

17. Una aplicación $f : X \to Y$ es *perfecta* si es continua, cerrada y $f^{-1}(y)$ es compacto $\forall y \in Y$. Probar que si $f : X \to Y$ es perfecta entonces:

    a) La imagen inversa de todo subconjunto compacto es compacto.

    b) X es localmente compacto sí y sólo si Y es localmente compacto.

18. Sea $\omega\mathbb{R}$ el subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ (producto numerable de copias de $\mathbb{R}$) formado por las sucesiones eventualmente nulas. Probar que $\omega\mathbb{R}$ no es completo en la métrica uniforme. Hallar la clausura de $\omega\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$.

19. Estudiar si los siguientes subconjuntos de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ son puntualmente acotados y si son equicontinuos:

    - $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $f_n(x) = x + \sin nx$
    - $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $g_n(x) = n + \sin x$
    - $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $h_n(x) = n \sin x/n$
    - $\{l_n : n \in \mathbb{N}\}$, con $l_n(x) = |x|^{1/n}$