TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJA 1)

Ejercicio 4. Sea X un conjunto no vacío y $\{\tau_i : i \in I\}$ una familia de topologías en X. Demostrar que la aplicación diagonal

$$\Delta : X \longrightarrow X^I$$

definida por $(\Delta x)_i := x$ para cada $i \in I$ es un homeomorfismo de $(X, \sup \tau_i)$ en $(\Delta(X), \tau_{\pi|\Delta(X)})$, donde τ_π designa la topología producto $\prod_{i\in I} \tau_i$. Estudiar el caso particular en que todas las topologías τ_i coincidan.

Solución. Recuérdese que, por definición, $\sup \tau_i$ es la menor topología en X que es más fina que todas las τ_i simultáneamente. Una subbase de la misma es por tanto $\mathcal{S} := \bigcup \tau_i$.

Es claro que Δ es una biyección sobre su imagen, que es la diagonal $D := \{(x_i)_{i\in I} : x_i = x_j \text{ para todos } i, j \in I\}$. Es continua: si $p_j : \prod_{i\in I}(X, \tau_i) \longrightarrow X_j$ denota la j–ésima proyección, la composición

$$p_j \circ \Delta = \mathrm{id}_X : (X, \sup \tau_i) \longrightarrow (X, \tau_j)$$

es continua puesto que $\sup \tau_i$ es más fina que τ_j.

Sólo resta ver que Δ es abierta sobre su imagen. Puesto que es biyectiva, bastará ver que la imagen de un abierto subbásico de X se transforma, mediante Δ, en un abierto de D. Un abierto subbásico de X es un elemento $O \in \tau_i$, para algún $i \in I$. Y $\Delta(O) = p_i^{-1}(O) \bigcap D$, que es obviamente abierto en D.

Si todas las topologías τ_i coinciden entre sí (digamos $\tau_i = \tau$ para todo $i \in I$), ahora $\sup \tau_i = \tau$ y por tanto se deduce que Δ es un homeomorfismo de (X, τ) en la diagonal D.

Ejercicio 5. Sea $\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios métricos donde cada métrica d_i está acotada por 1. Se define en $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ la distancia (comprobar que lo es)

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}.$$

Probar que la topología asociada a la métrica d es precisamente la topología producto en $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Solución. En primer lugar comprobaremos que d es efectivamente una métrica en $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Está bien definida, ya que la acotación $d_i \leq 1$ implica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$ es convergente (y acotada asimismo por 1). Además, todos los términos de la suma son no negativos y por tanto $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, todos los sumandos son nulos; es decir, si y sólo si $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, o equivalentemente si y sólo si $x = y$. La simetría y la desigualdad triangular son inmediatas.

Se trata ahora de comprobar que d define la topología producto en $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$. De la desigualdad

$$d(x, y) \geq \frac{d_i(x_i, y_i)}{2^i}$$

se sigue inmediatamente que las proyecciones $p_i : (\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, d) \longrightarrow (X_i, d_i)$ son continuas. Por tanto la topología inducida por d es más fina que la topología producto, y sólo resta ver que de hecho ambas coinciden. Para esto bastará demostrar que toda bola abierta para la métrica d es un abierto del producto. Sean, pues, $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B(x, \varepsilon)$, pongamos $\delta := \varepsilon - d(x, y) > 0$ y elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\delta}{2}.$$

Sea

$$U := B\left(y_1, \frac{\delta}{2}\right) \times \ldots \times B\left(y_k, \frac{\delta}{2}\right) \times \prod_{i\geq k+1} X_i,$$

que es un abierto del producto que contiene a y. Afirmamos que $U \subseteq B(x, \varepsilon)$. En efecto, si $z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U$, se tiene

$$d(z, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(z_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i(z_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{d_i(z_i, y_i)}{2^i} \leq$$

$$\leq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

y $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \delta + d(y, x) = \varepsilon$, de donde $z \in B(x, \varepsilon)$. Por tanto $y \in U \subseteq B(x, \varepsilon)$ y así $B(x, \varepsilon)$ es abierto en la topología producto, como queríamos.

Ejercicio 6. Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. En el conjunto producto $\prod_{i\in I} X_i$ se define la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} := \{\prod_{i\in I} M_i : M_i \in \tau_i \ \forall\ i \in I\}.$$

1. Probar que $\mathcal{B}$ es base para una topología τ_b en $\prod_{i\in I} X_i$ (que recibe el nombre de *topología de cajas*) y compararla con la topología producto.
2. Probar que las proyecciones $p_j : (\prod_{i\in I} X_i, \tau_b) \to (X_j, \tau_j)$ son continuas.
3. Sea $A_i \subset X_i$ para cada $i \in I$. Probar que

   $$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

   en τ_b.
4. Si $X_i = \mathbb{R}$ y la topología τ_i es la euclídea para cada $i \in I$, estudiar la clausura del conjunto

   $$H = \{(x_i) \in \mathbb{R}^I : x_i = 0 \text{ para casi todo } i \in I\}$$

   en las topologías de cajas y producto.
5. Estudiar si la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definida por $t \mapsto (t, t/2, t/3, ..., t/n, ...)$ es continua considerando en $\mathbb{R}$ la topología usual y en el producto $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la topología de cajas. ¿Es continua si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se dota de la topología producto?

Solución. (1) y (2) Que $\mathcal{B}$ es base para una topología es claro, ya que

$$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)\bigcap\left(\prod_{i\in I} M_i'\right)=\prod_{i\in I}(M_i\cap M_i')$$

implica que la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}$ es nuevamente un elemento de $\mathcal{B}$.

Podemos comparar fácilmente esta topología con la producto: todo abierto básico de la topología producto pertenece a $\mathcal{B}$, luego la topología generada por ésta, τ_b, es más fina que la producto. En consecuencia las proyecciones $p_j : (X,\tau_b)\longrightarrow (X_j,\tau_j)$ son continuas.[1]

(3) Puesto que $\overline{A_i}\subseteq X_i$ es cerrado para cada $i\in I$, la continuidad de las proyecciones p_i y la igualdad

$$\prod_{i\in I}\overline{A_i}=\bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(\overline{A_i})$$

establecen que $\prod_{i\in I}\overline{A_i}$ es un cerrado en τ_b que contiene a $\prod_{i\in I} A_i$. Por tanto

$$\prod_{i\in I}\overline{A_i}\supseteq\overline{\prod_{i\in I} A_i}.$$

Para ver el otro contenido, sea $x=(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\overline{A_i}$; queremos ver que $x\in\overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Esto exige probar que si $U=\prod_{i\in I} M_i$ es un abierto básico de τ_b que contiene a x (es decir, $x_i\in M_i$ para cada $i\in I$), la intersección

$$U\bigcap\left(\overline{\prod_{i\in I} A_i}\right)=\left(\prod_{i\in I} M_i\right)\bigcap\left(\prod_{i\in I} A_i\right)=\prod_{i\in I}(M_i\cap A_i)$$

es no vacía. Ahora bien, cada factor $M_i\cap A_i$ es no vacío, porque $x_i\in\overline{A_i}$ y $M_i\subseteq X_i$ es un abierto que contiene a x_i, lo que implica que su producto es no vacío también, como queríamos[2].

(4) Con la topología producto, $\overline{H}=\mathbb{R}^I$ (apartado 1. del ejercicio 2.). Pero H es cerrado (es decir, $\overline{H}=H$) para la topología de cajas τ_b, puesto que su complementario es abierto. En efecto, sea $x=(x_i)_{i\in I}\notin H$ y denotemos

$$J=\{i\in I : x_i\neq 0\},$$

que es un conjunto infinito porque $x\notin H$. Tomemos, para cada índice $i\in J$, un intervalo $(x_i-\varepsilon_i, x_i+\varepsilon_i)$ que no contenga al cero. El abierto de τ_b definido por

$$U:=\prod_{i\in J}(x_i-\varepsilon_i, x_i+\varepsilon_i)\times\prod_{i\notin J}\mathbb{R}$$

contiene a x, pero no corta a H ya que cualquier $y\in U$ tiene (al menos) sus coordenadas con índice en J distintas de cero, y éstas son una cantidad infinita. Así que $x\in U\subseteq\mathbb{R}^I-H$ y $\mathbb{R}^I-H$ es abierto, como afirmamos más arriba.

[1] No es difícil observar que las topologías producto y de cajas coinciden si, y sólo si, I es finito (es decir, en los productos finitos).

[2] Aquí utilizamos, tácitamente, el axioma de elección.

(5) φ es obviamente continua si en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se considera la topología producto, puesto que cada una de sus componentes lo es. Pero no es continua si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se dota de la topología de cajas: sea, por ejemplo,

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2} \right),$$

que es un entorno abierto de $(0, 0, \ldots)$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas. Pero $\varphi^{-1}(U)$ no es un entorno abierto de 0 en $\mathbb{R}$. En efecto,

$$\varphi(t) \in U \Leftrightarrow \left| \frac{t}{n} \right| < \frac{1}{n^2} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow |t| < \frac{1}{n} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow t = 0.$$

Así $\varphi^{-1}(U) = \{0\}$, que no es un entorno de 0 en $\mathbb{R}$, y por tanto φ no es continua en 0.

Ejercicio 7. Si X es un espacio métrico no discreto, probar que la diagonal Δ como subespacio de $X^{\mathbb{N}}$ con la topología de cajas no es homeomorfa a X.

Solución. Bastará demostrar que la diagonal $\Delta \subseteq X^{\mathbb{N}}$, cuando se dota de la topología de cajas, es un espacio discreto. Por tanto, si X no lo es, no pueden ser homeomorfos Δ y X entre sí (comparar con el ejercicio 4. de esta misma hoja).

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta$. Puesto que el punto está en la diagonal, todas sus coordenadas son iguales entre sí, digamos $x_n = x \in X \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Ahora sea

$$U := \prod_{n\in\mathbb{N}} B\left(x, \frac{1}{n} \right),$$

que es un abierto básico de τ_b y que contiene a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Delta \cap U$, por estar en la diagonal existe algún $y \in X$ tal que $y_n = y \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, y por pertenecer a U debe satisfacer $y = y_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $y = x$, y esto prueba que la intersección $\Delta \cap U$ se reduce únicamente al punto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto los puntos de Δ son todos abiertos en la topología de cajas, y Δ es discreto.

Ejercicio 9. Probar que un producto $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si X_α es localmente compacto para todo $\alpha \in A$ y además X_α es compacto para casi todo $\alpha \in A$.

Solución. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es localmente compacto. Tomemos un punto cualquiera $x \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, y sea U un entorno compacto de x (que existe por hipótesis). Podemos encontrar un entorno básico de x, digamos $V = \prod_{\alpha\in F} V_\alpha \times \prod_{\alpha\notin F} X_\alpha$, donde $F \subseteq A$ es finito, contenido en U. Ahora, si $\alpha \notin F$, se tiene que $X_\alpha = p_\alpha(V) \subseteq p_\alpha(U) \subseteq X_\alpha$, luego $p_\alpha(U) = X_\alpha$. Pero U es compacto y p_α continua, luego X_α (para $\alpha \notin F$) es compacto por ser imagen continua de un compacto.

Que cada X_α es localmente compacto es trivial: recuérdese (revisar, por ejemplo, el ejercicio 2.) que cada X_α puede encajarse como un cerrado en el producto $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Y un subespacio cerrado de un localmente compacto es, a su vez, localmente compacto.

($\Leftarrow$) Es trivial.

Ejercicio 10. Probar que un producto de espacios topológicos dotado de la topología de cajas no verifica una propiedad análoga a la enunciada en el teorema de Tychonoff.

Solución. Sea C el producto $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,1\}$, dotado de la topología de cajas. Cada espacio $\{0,1\}$ es compacto (por ser discreto y finito), pero afirmamos que C no lo es (de modo que no se verifica el teorema de Tychonoff para la topología de cajas). En efecto, la topología de cajas en C no es otra que la discreta: si $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in C$ es cualquier punto, $\{x\}=\prod_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$, que es un abierto (en la topología de cajas) por ser producto (arbitrario) de abiertos. En consecuencia C es discreto. Pero como es infinito, no puede ser compacto.

Ejercicio 12. Si designamos por C el discontinuo de Cantor, probar:

1. C es un subconjunto raro en el intervalo $I=[0,1]$.
2. C es un espacio homogéneo (esto demuestra que "ser punto extremo" no es propiedad topológica).

Solución. (1) Se trata de ver que el interior de C en $[0,1]$ es vacío. Esto puede probarse de varias maneras, pero quizás la más intuitiva es la que sigue. Denotemos por λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Recuérdese que C se obtiene como intersección de una sucesión decreciente de compactos $C_n\subseteq[0,1]$, cada uno de los cuales es una unión de 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Por tanto $0\le\lambda(C)\le\lambda(C_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, lo que implica $\lambda(C)=0$. Si el interior de C en $[0,1]$ fuese no vacío, existiría algún intervalo I contenido en C, y $\lambda(C)\ge\lambda(I)>0$, contradicción.

(2) Aquí es más apropiada la definición de C como producto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos elementos (distintos) de C, se trata de encontrar un homeomorfismo $h:C\longrightarrow C$ tal que $h(x)=y$. Para ello pongamos, para cada $n\in\mathbb{N}$, $h_n:\{0,1\}\longrightarrow\{0,1\}$ el único homeomorfismo de $\{0,1\}$ que lleva x_n en y_n (la identidad si $x_n=y_n$ o la aplicación que intercambia 0 y 1 en otro caso). Entonces $h:C\longrightarrow C$, definido por $h\big((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\big):=\big(h_n(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, es un homeomorfismo de C en sí mismo que lleva x en y.