TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJA 5)

Ejercicio 7. Se dice que un espacio topológico X es *perfectamente normal* si es T_1 y para todo par de cerrados disjuntos no vacíos C_1 y C_2 existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$. Probar que X es perfectamente normal si, y sólo si, es normal, T_1 y todo cerrado de X es un G_δ (es decir, es intersección numerable de abiertos).

Solución. ($\Rightarrow$) Es claro que si X es perfectamente normal, es T_1 y normal. Veamos que todo cerrado $A \subseteq X$ es un G_δ. Si $A = X$, nada hay que probar. Si no, sea $p \notin A$ y tomemos $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = p$ (existe porque A y $\{p\}$ son cerrados y se aplica la hipótesis de ser X perfectamente normal). Los conjuntos $U_n := f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{n}\right)\right)$ son abiertos y además $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{n}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. Así $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es intersección numerable de abiertos, y por tanto un G_δ.

($\Leftarrow$) Suponemos ahora que X es normal, T_1 y todo cerrado de X es un G_δ. Sean $C_1, C_2 \subseteq X$ cerrados disjuntos. Por hipótesis C_1 es un G_δ, y existe una sucesión de abiertos U_n tales que $C_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Además, y si es preciso sustituyendo cada U_n por $U_n \cap (X - C_2)$, podemos suponer que $U_n \subseteq X - C_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. X es normal, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función continua $g_n : X \longrightarrow [0,1]$ que separa los cerrados disjuntos C_1 y $X - U_n$, digamos $g_n(C_1) = 0$ y $g_n(X - U_n) = 1$. Pongamos

$$g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{2^n} : X \longrightarrow [0,1],$$

que es una función continua tal que $g(C_1) = 0$. Más aún, $g^{-1}(0) = C_1$ ya que si $g(x) = 0$, necesariamente $g_n(x) = 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y por tanto $x \in U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = C_1$. La elección de $C_2 \subseteq X - U_n$ hace además que $g(C_2) = 1$.

El mismo argumento prueba que existe $h : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $h^{-1}(1) = C_2$ y $h(C_1) = 0$. Eligiendo $f := \frac{1}{2}(g + h)$ se obtiene una función continua de X en $[0,1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$. Por tanto X es perfectamente normal.

Ejercicio 10. Probar que los siguientes espacios no son metrizables:

1. El producto numerable de líneas, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dotado de la topología de cajas.
2. El producto de una cantidad no numerable de líneas, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, dotado de la topología producto.
3. El espacio Ω de todos los ordinales menores o iguales que el primer ordinal no numerable.

Solución. (1) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dotado de la topología de cajas, no puede ser metrizable porque no es I–numerable. En efecto, supongamos que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fuese una base numerable de entornos de $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (por ejemplo). Teniendo en cuenta que una base de abiertos en la topología de cajas viene dada por productos arbitrarios de abiertos en cada factor, para cada $n \in \mathbb{N}$ debe existir un entorno abierto $V_{k,n}$ de 0 en $\mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{0} \in \prod_{k\in\mathbb{N}} V_{k,n} \subseteq U_n.$$

Ahora, para cada $V_{k,n}$ sea $x_{k,n} \in V_{k,n} - \{0\}$ cualquier punto. Definamos

$$W := \prod_{k\in\mathbb{N}} \big(V_{k,k} - \{x_{k,k}\}\big),$$

que es un producto de $\mathbf{0}$ en la topología de cajas, por ser producto de entornos de 0 en cada factor. Puesto que se supuso que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de entornos de $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, debería existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $W \supseteq U_n$, de donde

$$\prod_{k\in\mathbb{N}} \big(V_{k,k} - \{x_{k,k}\}\big) = W \supseteq U_n \supseteq \prod_{k\in\mathbb{N}} V_{k,n}$$

y así debería ser en particular $V_{n,n} - \{x_{n,n}\} \supseteq V_{n,n}$, lo cual es contradictorio. Esto prueba que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dotado de la topología de cajas, no es I–numerable, y por tanto no metrizable.

(2) Al igual que en el apartado (1), $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, dotado de la topología producto, no es metrizable porque no es I–numerable. El argumento es muy similar al anterior: supongamos que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fuese una base numerable de $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Cada U_n contiene un abierto básico, que es producto de una cantidad finita de entornos arbitrarios de 0 en $\mathbb{R}$ y toda la recta real $\mathbb{R}$ en los restantes factores. En particular el conjunto $F_n := \{r \in \mathbb{R} : p_r(U_n) \neq \mathbb{R}\}$, donde $p_r : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ denota la proyección r–ésima, es finito. Sea $F := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq \mathbb{R}$, que es numerable por ser unión numerable de conjuntos finitos. Como $\mathbb{R}$ es no numerable, existe $r_0 \in \mathbb{R} - F$. Eligiendo

$$V := \prod_{r\neq r_0} \mathbb{R} \times (-1,1)_{r_0}$$

se obtiene un entorno de $\mathbf{0}$ en la topología producto tal que $V \not\supseteq U_n$ para ningún $n \in \mathbb{N}$, por construcción. Luego $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ no es metrizable.

Nota. Obsérvese que el argumento anterior, junto con el ejercicio 5. de la hoja 1, prueba que un producto de espacios metrizables es metrizable si, y sólo si, es un producto numerable (o finito).