TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJA 7)

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

1. Estudiar si $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto y uniforme.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > 0$. Estudiar si esta aplicación pertenece a la clausura de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

Solución. (1) Es bien conocido que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto a la topología de la convergencia uniforme, pero no respecto a la topología producto.

(2) f no pertenece a $\overline{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ en la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos. En efecto, supongamos que existiese una red $(f_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $(f_d)_{d\in D} \longrightarrow f$. Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un entorno compacto cualquiera de 0, pongamos por ejemplo $K = [-1,1]$. Entonces $(f_d|_K)_{d\in I}$ converge uniformemente a $f|_K$. Pero como cada $f_d|_K$ es continua, se sigue que $f|_K$ debe ser continua (porque la convergencia es uniforme en K). No obstante, $f|_K$ es discontinua, porque f lo es en $0 \in K$. Esta contradicción prueba la afirmación (véase también el ejercicio 10.).

Ejercicio 6. (Examen de septiembre, 2002)

1. Estudiar la clausura y el interior del conjunto
$$\mathcal{A} := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es acotada}\}$$
en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dotado de la topología producto.

2. Estudiar la clausura y el interior del conjunto
$$\mathcal{B} := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es continua y acotada}\}$$
en $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (el conjunto de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) con la topología compacto–abierta.

Solución. (1) (a) El interior $\mathcal{A}$, que denotamos $\operatorname{int}(\mathcal{A})$, es vacío. En efecto, supongamos que $f_0 \in \operatorname{int}(\mathcal{A})$, y sea U un abierto básico (de la topología producto) tal que $f_0 \in U \subseteq \mathcal{A}$. Existen entonces $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$, entornos de $f_0(x_1), \ldots, f_0(x_n)$ respectivamente, tales que

$$U = U_{x_1} \times \ldots \times U_{x_n} \times \prod_{x \neq x_1,\ldots,x_n} \mathbb{R} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x_i) \in U_{x_i} \ \forall\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Pero claramente hay funciones $f \in U$ que no son acotadas, por ejemplo eligiendo

$$f(x) := \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i, \\ x & \text{si } x \neq x_1, \ldots, x_n, \end{cases}$$

es claro que $f \in U$ pero $f \notin \mathcal{A}$, porque no es acotada. Así $U \not\subseteq \mathcal{A}$, que es una contradicción. Obsérvese que f no es continua.

(b) $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Para verlo, sean $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ y $V = U_{x_1} \times \ldots \times U_{x_n} \times \prod_{x \neq x_1,\ldots,x_n} \mathbb{R}$ un entorno básico de f en la topología producto. Poniendo

$$g(x) := \begin{cases} f(x_i) & \text{si } x = x_i \text{ para algún } i = 1,\ldots,n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es claro que $g \in V \cap \mathcal{A}$. Como V y f son arbitrarios, $\overline{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(2) (a) Al igual que en el apartado anterior, $\operatorname{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$, y podemos razonar de modo similar a como hicimos arriba. Supuesto que $f_0 \in \operatorname{int}(\mathcal{B})$, habría de existir U abierto básico de la topología compacto–abierta en $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $f_0 \in U \subseteq \mathcal{B}$. Aquí $U = \bigcap_{j=1}^n S(K_j, U_j)$, donde los $K_j \subseteq \mathbb{R}$ son compactos y $f_0(K_j) \subseteq U_j \subseteq \mathbb{R}$, con los U_j abiertos. Como el conjunto $K := \bigcup_{j=1}^n K_j$ es una unión finita de compactos, es compacto y en consecuencia existe $M > 0$ tal que $K \subseteq [-M, M]$. Pongamos

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } -M \leq x \leq M, \\ (x+M) + f(-M) & \text{si } x \leq -M, \\ (x-M) + f(M) & \text{si } x \geq M. \end{cases}$$

Es claro que g es continua y, puesto que $g|_K = f|_K$, es $g \in U$. Pero g no es acotada, de modo que $g \notin \mathcal{B}$, lo que contradice que $U \subseteq \mathcal{B}$. Esto prueba que $\operatorname{int}(\mathcal{B}) = \emptyset$.

(b) $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En efecto, sean $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\bigcap_{j=1}^n S(K_j, U_j)$ un entorno básico de f en la topología compacto–abierta. Elijamos $M > 0$ tal que $K := \bigcup_{j=1}^n K_j \subseteq [-M, M]$. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } -M \leq x \leq M, \\ f(-M) & \text{si } x \leq -M, \\ f(M) & \text{si } x \geq M. \end{cases}$$

Es claro que g es continua y acotada ($g \in \mathcal{B}$) y además $g|_K = f|_K$, luego en particular $g|_{K_j} = f|_{K_j}$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así $g \in \bigcap_{j=1}^n S(K_j, U_j)$, y como esto es cierto para un entorno básico arbitrario de f, se concluye que $f \in \overline{\mathcal{B}}$ y en definitiva $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $\overline{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$.

1. Probar que $\overline{d}$ es una métrica en X equivalente a d.
2. (X, d) es completo si y solo si $(X, \overline{d})$ es completo.
3. Si un espacio métrico (X, τ) es compacto, todas las métricas que dan lugar a la topología τ son acotadas.

Solución. (1) Obsérvese que, si $x \in X$ es cualquiera y $0 < r < 1$, se tiene $B_d(x, r) = B_{\overline{d}}(x, r)$, donde $B_d(x, r)$ denota la bola abierta de centro x y radio r para la métrica d y $B_{\overline{d}}(x, r)$ el mismo concepto para la métrica $\overline{d}$. Como tales bolas abiertas forman base de las topologías generadas por d y $\overline{d}$ respectivamente, se concluye que ambas coinciden.

(2) Es trivial.

(3) En efecto, sea d una métrica que de lugar a la topología τ. Es bien conocido que $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, luego (como X es compacto, y por tanto también $X \times X$) su imagen $d(X \times X) \subseteq \mathbb{R}$ es un compacto, en particular acotado, digamos $d(X \times X) \subseteq [-M, M]$ para algún $M > 0$. Esto significa que $d(x, y) \leq M$ para todos $x, y \in X$, de modo que d es acotada.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas $f : I = [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dotado de la métrica uniforme,

$$\rho(f, g) := \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in I\}.$$

Estudiar si las siguientes funciones son continuas :

1. $\phi : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \int_0^1 f(x)\, dx$.
2. $\phi : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ definida por $f \mapsto \int_0^x f(t)dt$.

Solución. Utilizaremos repetidamente, para $t \in I$, la desigualdad obvia $|f(t) - f_0(t)| \leq \rho(f, f_0)$, que se sigue inmediatamente de la definición de ρ.

(1) Sea $f_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ fija, probaremos que ϕ es continua en f_0. En efecto, cualquiera que sea $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, se tiene

$$|\phi(f) - \phi(f_0)| = \left| \int_0^1 \big(f(t) - f_0(t)\big)\, dt \right| \leq$$
$$\leq \int_0^1 |f(t) - f_0(t)|\, dt \leq \int_0^1 \rho(f, f_0)\, dt = \rho(f, f_0),$$

de donde ϕ es claramente continua, pues f_0 era arbitrario.

(2) Sean $f_0 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ fija, y $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ cualquiera. Para $x \in I$ se tiene

$$|\phi(f)(x) - \phi(f_0)(x)| = \left| \int_0^x f(t)\, dt - \int_0^x f_0(t)\, dt \right| = \left| \int_0^x \big(f(t) - f_0(t)\big)\, dt \right| \leq$$
$$\leq \int_0^x |f(t) - f_0(t)|\, dt \leq \int_0^1 |f(t) - f_0(t)|\, dt \leq \int_0^1 \rho(f_0, f)\, dt = \rho(f_0, f)$$

Así pues

$$\rho(\phi(f), \phi(f_0)) = \sup_{x \in I} |\phi(f)(x) - \phi(f_0)(x)| \leq \rho(f, f_0)$$

y ϕ es continua en f_0. Como f_0 era arbitrario, ϕ es continua.

Ejercicio 9. Estudiar si son compactos los siguientes subconjuntos del espacio producto I^I:

1. $A := \{f \in I^I : f(0) = 0\}$,
2. $B := \{f \in I^I : f \text{ continua y } f(0) = 0\}$.

Solución. (1) A es cerrado, pues si $p_0 : I^I \longrightarrow I$ denota la 0–ésima proyección (evaluación en $x = 0$), $A = p_0^{-1}(0)$ (preimagen de un cerrado por una aplicación continua). Por el teorema de Tychonoff I^I es compacto, y en consecuencia A también lo es (cerrado en un compacto).

(2) Por el contrario, B no puede ser compacto. Si lo fuese, sería cerrado en I^I (porque un compacto en un espacio Hausdorff es cerrado), pero esto no es cierto. En efecto, la sucesión de funciones $f_n : I \longrightarrow I$ definida como

$$f_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ n\left(t - \frac{1}{n}\right) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

está contenida en B pero converge a la función $f : I \longrightarrow I$ dada por $f(0) = 0$ y $f(t) = 1$ si $0 < t \leq 1$, que no es continua (y por ello no está en B).

Ejercicio 10. Un *k–espacio* es un espacio topológico (X, τ) que verifica la equivalencia:

$$C \subseteq X \text{ es cerrado en } \tau \Leftrightarrow C \cap K \text{ es cerrado en } \tau|_K \ \forall\ K \subseteq X \text{ compacto en } \tau.$$

1. Probar que todo espacio métrico y todo espacio localmente compacto es un k–espacio.

2. Sea (X, τ) un k–espacio y sea Y espacio topológico cualquiera. Si una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es tal que $f|_K$ es continua para cualquier conjunto compacto $K \subseteq X$, probar que f es continua.

3. Sean X un k-espacio e (Y, d) un espacio métrico. Probar que $\mathcal{C}(X, Y)$ (el conjunto de aplicaciones continuas de X en Y) es cerrado en el espacio Y^X dotado de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

Solución. Para demostrar que X es un k–espacio basta comprobar la implicación $\Leftarrow$ de la definición, pues la otra siempre se verifica trivialmente. Así, se trata de ver que si $C \subseteq X$ es tal que $C \cap K$ es cerrado en K para cada compacto K, entonces C es cerrado en X.

(1) (a) Si X es métrico, s un k–espacio. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ una sucesión en C que converge a un punto x, queremos ver que $x \in C$. Ahora, $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es un compacto, luego por hipótesis $C \cap K$ es cerrado en K. Como x es límite, en $C \cap K$, de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, y C es cerrado en $C \cap K$, se sigue que $x \in C$.

(b) Si X es localmente localmente compacto, es un k–espacio. Sea $(x_d)_{d\in D} \subseteq C$ una red en C que converge a un punto x, queremos ver que $x \in C$. Sea K un entorno compacto de x (que existe porque X es localmente compacto), como $(x_d)_{d\in D} \longrightarrow x$ existe $d_0 \in D$ tal que $x_d \in K$ si $d \geq d_0$. Entonces x es un punto de adherencia de $\{x_d : d \geq d_0\} \subseteq C$ en K, luego (como $C \cap K$ es cerrado en K), $x \in C$.

(2) Para ver que f es continua será suficiente demostrar que $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X, cualquiera que sea el cerrado $C \subseteq Y$. Ahora bien, por ser X un k–espacio sólo hace falta comprobar que $f^{-1}(C) \cap K$ es cerrado en K para todo compacto $K \subseteq X$. Pero $f^{-1}(C) \cap K = (f|_K)^{-1}(C)$, y como $f|_K$ es continua por hipótesis, $(f|_K)^{-1}(C) \cap K$ es ciertamente cerrado en K.

(3) Sea $(f_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ una red en $\mathcal{C}(X, Y)$, y supongamos que $(f_d)_{d\in D} \longrightarrow f$ uniformemente sobre los compactos. Es decir, fijado cualquier compacto $K \subseteq X$, es $(f_d|_K)_{d\in D} \longrightarrow f|_K$ uniformemente. Pero cada $f_d|_K$ es continua, y el límite uniforme de aplicaciones continuas es nuevamente continuo, i. e. $f|_K$ es continuo para cada compacto K. Como X es un k–espacio, de (2) se sigue que f es continua, como queríamos.

Ejercicio 11. Sean X un espacio localmente compacto, Y un espacio topológico cualquiera y $\mathcal{C}_{co}(X,Y)$ el espacio de las aplicaciones continuas de X en Y dotado de la topología compacto–abierta. Probar que la evaluación $e : \mathcal{C}(X,Y) \times X \longrightarrow Y$ definida por $(f,x) \mapsto f(x)$ es continua (el primer espacio tiene la topología producto).

Solución. Probemos que e es continua en $(f_0, x_0) \in \mathcal{C}(X,Y) \times X$ arbitrario pero fijo. Cualquiera que sea U entorno de $f_0(x_0)$ en Y, por ser f_0 continua existe V entorno de x_0 en X tal que $f_0(V) \subseteq U$. Además, X es localmente compacto, luego existe $W \subseteq V$ entorno de x_0 compacto. En particular $f_0(W) \subseteq U$. Así pues $S(W,U) \times W$ es un entorno de (f_0, x_0) en $\mathcal{C}(X,Y) \times X$, y además $e\big(S(W,U) \times W\big) \subseteq U$ por construcción.