TOPOLOGÍA
CURSO 2006–2007
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS (HOJAS 2 Y 3)

Ejercicio 10. (Examen de Septiembre, 2004) Sea X un espacio topológico Hausdorff. Probar que X es localmente compacto si, y sólo si, todo filtro convergente en X tiene un miembro compacto.

Solución. Si X es localmente compacto y $\mathcal{F}$ es un filtro en X convergente a x, por definición todo entorno de x pertence a $\mathcal{F}$. Pero entonces basta tomar un entorno compacto de X (que existe porque X es localmente compacto) y se concluye que $\mathcal{F}$ contiene un miembro compacto.

Recíprocamente, supongamos que todo filtro convergente en X posee un miembro compacto, y sea x un punto cualquiera de X. La colección de todos los entornos de x en X es un filtro que converge a x, luego por hipótesis debe contener algún miembro compacto, así que x posee un entorno compacto V. Denotando por τ la topología de X, se tiene que $(V, \tau|_V)$ es compacto y Hausdorff, luego localmente compacto. Dado ahora U entorno de x en X, la intersección $U \cap V$ es un entorno de x en $(V, \tau|_V)$, y existe entonces $W \subseteq U \cap V$ compacto que es entorno de x en $(V, \tau|_V)$. Pero como V es entorno de x en X, W es de hecho entorno compacto de x en X, y contenido en U. Por tanto x posee una base de entornos compactos y X es localmente compacto.

Ejercicio 11. (Examen de Julio, 2002) Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Se dice que $\mathcal{F}$ es *de Cauchy* en (X, d) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F \times F \subseteq \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Demostrar:

1. Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, el filtro asociado también es de Cauchy.

2. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en (X, d), entonces $\mathcal{F}$ converge a cada uno de sus puntos de aglomeración.

3. Si (X, d) es completo como espacio métrico, demostrar que un filtro $\mathcal{F}$ es convergente si, y sólo si, es de Cauchy.

Solución. Por abreviar, diremos que $F \subseteq X$ es ε–pequeño si satisface la condición del enunciado, a saber

$$F \times F \subseteq \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

(1) El filtro $\mathcal{F}$ asociado a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es aquel que tiene por base a las secciones $S_k = \{x_n : n \geq k\}$. Fijado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $r \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq r$ es $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Así pues la sección S_r (y todas las S_k, con $k \geq r$) son ε–pequeñas y por tanto $\mathcal{F}$ es de Cauchy.

(2) Sean $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X y x un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ (es decir, $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$). Se trata de demostrar que $\mathcal{F} \longrightarrow x$, y como las bolas abiertas centradas en x forman base de entornos del mismo, será suficiente demostrar que $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{F}$ es de Cauchy, existe $F \in \mathcal{F}$ que es $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$–pequeño, y afirmamos que $F \subseteq B(x, \varepsilon)$. Para verlo, sea $y \in F$ arbitrario, queremos probar que $d(y, x) < \varepsilon$.

Puesto que x es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ (de modo que $x \in \overline{F}$), la intersección $z \in B\big(x, \frac{\varepsilon}{2}\big) \cap F$ es no vacía y podemos tomar algún punto en ella, sea z. Ahora $y, z \in F$, que es $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$–pequeño, luego $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además por construcción $d(z, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, de modo que $d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < \varepsilon$. Por tanto $F \subseteq B(x, \varepsilon)$, como queríamos.

Finalmente, como $F \subseteq B(x, \varepsilon)$ y $\mathcal{F}$ es un filtro, se concluye que $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$, lo que termina la prueba de que $\mathcal{F} \longrightarrow x$.

(3) Suponemos que X es completo, y se trata de ver que $\mathcal{F}$ converge si, y sólo si, es de Cauchy.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$. Entonces $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathcal{F}$, y claramente $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ es ε–pequeña.

($\Leftarrow$) La hipótesis es ahora que $\mathcal{F}$ es de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n \in \mathcal{F}$ $\left(\frac{1}{n}\right)$–pequeño, y tomemos $x_n \in F_1 \cap \ldots \cap F_n$ (esta intersección es no vacía porque $\mathcal{F}$ es un filtro). Obsérvese que, por construcción, $x_n \in F_k$ siempre que $n \geq k$.

La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ así obtenida es de Cauchy, pues dado cualquier $\varepsilon > 0$ y elegido $r \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r} < \varepsilon$, para $n, m \geq r$ es $x_n, x_m \in F_r$, luego $d(x_n, x_m) < \frac{1}{r} < \varepsilon$. Como X es completo, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a algún $x \in X$.

Veamos que $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Fijado $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Si $m \geq n$, como $x_n, x_m \in F_n$, es $d(x_n, x_m) < \frac{1}{n}$ y pasando al límite (en m) se obtiene $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$. Pero F_n es $\left(\frac{1}{n}\right)$–pequeño, y así si $y \in F_n$ se concluye que $d(y, x) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$. Luego $F_n \subseteq B(x, \varepsilon)$ y $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{F}$, de donde $\mathcal{F} \longrightarrow x$.