Examen de topología. (Primera parte)

Septiembre-2006

1. Probar que todo espacio métrico es normal. Sea X el espacio de los racionales dotado de la topología usual y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la función que lleva los pares a 0 y los impares a 1. ¿Se puede extender f a una función continua definida en todo X?

2. Definición de familia localmente finita
   Sea X un espacio topológico y $\mathcal{M}$ una familia de subconjuntos cerrados, localmente finita y tal que $\cup\{M, M \in \mathcal{M}\} = X$. Probar que una aplicación $f : X \to Y$ (donde Y es un espacio topológico cualquiera) es continua si y solo si $f|_M$ es continua para todo $M \in \mathcal{M}$.

3. Sea X un espacio topológico y sea $Y \subset X$ denso. Establecer si son ciertas o falsas las siguientes implicaciones:

   - Y separable $\Longrightarrow X$ separable.
   - Y Lindelöf $\Longrightarrow X$ Lindelöf.
   - Y metrizable $\Longrightarrow X$ metrizable.