Examen de topología. (Segunda parte)

28-Junio-2006

1. En $\mathbb{R}^2$ se define la topología τ mediante las bases de entornos siguientes:

   $\mathcal{B}(a,b) = \{J_\epsilon(a,b); \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$ donde $J_\epsilon(a,b) = \{(x,b) \in \mathbb{R}^2, a-\epsilon < x < a+\epsilon\}$ si $(a,b) \neq (0,0)$

   $\mathcal{B}(0,0) = \{H \subseteq \mathbb{R}^2;$ tales que $(0,0) \in H,$ y H cumple la condición (*)$\}$

   (*): Para toda recta horizontal L_h y toda recta vertical L_v, $H \cap L_h$ y $H \cap L_v$ son abiertos "usuales" de L_h y L_v respectivamente.

   - Comparar τ con la topología usual del plano $\mathbb{R}^2$.
   - ¿Es cerrado en τ el subconjunto $\{(1/n, 1/n), n \in \mathbb{N}\}$?
   - Sea $M = \{a\} \times \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Hallar la topología inducida por τ en M.
   - Existe en $(\mathbb{R}^2, \tau)$ algún conjunto abierto y cerrado a la vez?
   - Sea $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$. Probar que el punto $(0,1)$ se puede separar de C mediante una función real continua (es decir existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con $f(C) = \{0\}$ y $f((0,1)) = 1$).
   - Estudiar si $(\mathbb{R}^2, \tau)$ es I-numerable, y si es separable.

2. Sea D un subconjunto denso de un espacio topológico (X, τ). Probar

   a) Si $W \subset X$ es un abierto en τ, $\overline{W \cap D} = \overline{W}$.

   b) Si X es regular y un punto $x \in D$ admite una base numerable de entornos en D, también admite una base numerable de entornos en X.

   c) La afirmación de b) no es cierta en general.

3. Sea $\mathbb{Z}$ dotado de la topología discreta; consideramos $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.

   - Es $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ un espacio discreto?
   - ¿Contiene algún subespacio compacto infinito?.
   - ¿Es metrizable?. En caso afirmativo dar una métrica que genere la topología .