Examen de topología. (Segunda parte)

Septiembre-2006

1. Sea $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual.

   a) Consideramos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con su topología producto. Hallar el interior y la clausura del siguiente subconjunto:

   $$M = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tales que } -1 < f(n) < 1, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

   b) Sea τ_b la topología de las cajas en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y sea $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $g(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Probar que no existen sucesiones en M que converjan en τ_b a g.

   c) ¿Existe alguna red en M que converja a g en τ_b?

   d) ¿Es $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tau_b)$ un espacio metrizable?

   e) Estudiar la cuestión b) en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto.

2. Estudiar los axiomas de numerabilidad y separación en el espacio
   $X := \mathbb{R}^2$ dotado de la topología τ, cuya base de entornos en cada punto $z \in \mathbb{R}^2$ está dada por discos euclídeos abiertos centrados en z, excluídos una cantidad finita de diámetros y unido de nuevo el conjunto unipuntual $\{z\}$.

3. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff, no compacto. Se define
   $\mathcal{F} := \{F \subset X, \text{ tal que } \overline{X \setminus F} \text{ es compacto }\}$. Probar:

   a) $\mathcal{F}$ es un filtro.

   b) $\mathcal{F}$ no converge a ningún punto de X.