Problemas de topología. Hoja 2

11-III-2008

1. Hallar las sucesiones convergentes a 0 en $(\mathbb{R}, \tau)$ dónde τ es una de las siguientes topologías: 1) discreta, 2) cofinita y 3) conumerable.

2. Probar que si un espacio topológico (X, τ) verifica el I-axioma de numerabilidad, entonces se cumple la siguiente afirmación:
   $C \subseteq X$ es cerrado si y solo si $\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$ tal que $x_n \to x \Rightarrow x \in C$.

   Dar un ejemplo de espacio topológico dónde no se cumpla la afirmación.

3. Probar que un espacio topológico es discreto si y solo si toda red convergente es "eventualmente" constante.

4. Sean (X, τ) , (Y, τ') espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación cualquiera. Probar:

   f es continua en $x \in X$ si y solo si para toda red $S = \{s_d, D, \leq\}$ con valores en X, $S \to x$ implica $f(s_d) \to f(x)$.

5. Sean τ y τ' dos topologías en un conjunto X. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   1) Si una red en X es τ-convergente a x, es también τ'-convergente a x ($\forall x \in X$).

   2) $\tau' \leq \tau$.

   En consecuencia: si dos topologías en X tienen el mismo comportamiento respecto a la convergencia de redes, entonces las dos topologías coinciden.

6. Sea $S = \{s_d, D, \leq\}$ una red en un espacio topológico X. Probar que si la red S converge a $x \in X$, toda subred de S también converge a x.

7. Dado un conjunto X, sea τ la topología débil asociada a una familia de aplicaciones $\phi_\alpha : X \to X_\alpha$ donde (X_α, τ_α) designa un espacio topológico para cada $_\alpha \in A$. Probar que una sucesión $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset X$ converge a $x \in X$ respecto de la topología τ si y solo si $\phi_\alpha(x_n) \to \phi_\alpha(x)$ converge en X_α para cada $\alpha \in A$.

   Enunciar la correspondiente propiedad para el espacio producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

8. Probar que si una red $T = \{t_s, S, \leq\}$ definida en un conjunto X no está eventualmente en un subconjunto $M \subset X$, entonces está frecuentemente en su complementario $X \setminus M$.

9. Una red $T = \{t_s, S, \leq\}$ definida en un conjunto X se dirá que es *universal* si para cada subconjunto $M \subset X$ la red está eventualmente en M o bien está eventualmente en $X \setminus M$. Probar que si T es una red universal, cualquier subred de T es también una red universal.

10. Sea $(\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ el espacio producto de una familia de espacios topológicos (X_α, τ_α), $\alpha \in A$. Para cada α designamos por $\pi_\alpha : \Pi X_\beta \to X_\alpha$ la proyección canónica correspondiente. Demuéstrese que si una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ en $(\Pi X_\alpha, \tau_\pi)$ tiene un punto de aglomeración x, entonces las redes $(\pi_\alpha(x_\lambda))$ tienen a $\pi_\alpha(x)$ como punto de aglomeración. El recíproco no es cierto: dar un contraejemplo en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado de la topología usual.

11. En el espacio producto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, sea E el conjunto formado por todas aquellas funciones que toman el valor 0 para una cantidad finita de puntos $F \subset \mathbb{R}$, y el valor 1 en los puntos de $\mathbb{R} \setminus F$. Sea g la función de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que es idénticamente nula. Probar:

    - $g \in \overline{E}$
    - No existe ninguna sucesión en E que converja a g
    - Definir una red en E que converja a g