Problemas de topología. Espacios normales (Hoja 5)

24-IV-2008

1. Probar que la linea de Sorgenfrey $\mathbb{R}_s$ es normal, pero $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ no lo es, (por tanto la normalidad no es propiedad multiplicativa).

2. Probar que todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal. Sin embargo la "normalidad" no es propiedad hereditaria.

3. Demostrar que si en un espacio topológico normal (X, T) se tienen tres cerrados C_0, C_1 y C_2 disjuntos dos a dos, entonces existe una función continua $f\colon (X, T) \to ([0, 2], T_u|_{[0,2]})$ tal que $f(C_0) = 0$, $f(C_1) = 1$ y $f(C_2) = 2$.

4. Probar que el plano de Niemytzki es completamente regular, pero no es normal. ¿Es localmente compacto?.

5. Un espacio (X, τ) es *de Lindelöf* si todo recubrimiento abierto de X posee un subrecubrimiento numerable (No confundir con espacio numerablemente compacto). Probar las siguientes afirmaciones:

   - Si un espacio X verifica el segundo axioma de numerabilidad, X es de Lindelöf.
   - El plano de Niemytzki no es de Lindelöf.

6. (Examen del 2002) *Doble círculo de Alexandroff.* Se considera el espacio (X, T) donde $X = C_1 \cup C_2$, C_i es la circunferencia de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio i, $i = 1, 2$, y T es la topología generada por la base (utilizamos notación de los números complejos para los elementos de $\mathbb{R}^2$).

$$\mathcal{B} = \Big\{\{z\} \mid z \in C_2\Big\} \cup \Big\{V(z, \epsilon) \mid z \in C_1, \epsilon > 0\Big\}$$

$$V(z, \epsilon) = \Big\{w \in X \mid \mathrm{Arg}(w) \in (\mathrm{Arg}(z) - \epsilon, \mathrm{Arg}(z) + \epsilon)\Big\} - \Big\{2e^{i\mathrm{Arg}(z)}\Big\}.$$

   a) ¿Es (X, T) compacto?
   b) Estudiar los axiomas de separación de (X, T).
   c) Estudiar los axiomas de numerabilidad.
   d) Demostrar que no toda aplicación continua de C_2 (con la topología inducida de X) en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$.

e) Probar que el doble círculo de Alexandroff es secuencialmente compacto. Probar que no es separable ni metrizable.

7. Probar que el espacio definido en el ejercicio anterior, (doble círculo de Alexandroff) es una compactación del espacio discreto de la potencia del continuo.

8. Se dirá que un espacio topológico (X, τ) es *perfectamente normal* si es T_1 y para todo par de cerrados disjuntos no vacíos C_1, C_2 existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = C_1$ y $f^{-1}(1) = C_2$. Probar: El espacio X es perfectamente normal sí y sólo si es normal, T_1 y todo cerrado de X es un G_δ (es decir, intersección numerable de abiertos).

9. (Examen del IX-99) ¿Es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un espacio normal? ¿Es perfectamente normal?

10. Sea X un espacio topológico. Se define la cuasi-componente de un punto $x \in X$, Q_x, como la intersección de todos los abierto-cerrados que contienen a x. Probar:

    - $C_x \subseteq Q_x$, donde C_x designa la componente conexa de x.
    - Si X un espacio compacto, $\{M_i, i \in I\}$ una familia de cerrados con $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$, y U un abierto que contiene a $\bigcap_{i \in I} M_i$, probar que existe $F \subset I$ finito tal que $U \supseteq \bigcap_{i \in F} M_i$.
    - Si X un espacio compacto y T_2, probar que Q_x es conexo, y por tanto $Q_x \subseteq C_x$, es decir, bajo estas hipótesis coinciden las componentes y las cuasi-componentes. (Indicación: X es normal en este caso).