Problemas de Topología.
Espacios Funcionales (Hoja 7)

15-Mayo-2008

1. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $x \mapsto x/n$. Estudiar si la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge en las topologías de la convergencia puntual, de la convergencia uniforme en los compactos, y en la uniforme.

2. (del examen de II-06) Designamos por $C(X)$ el espacio de las funciones reales continuas definidas en un espacio topológico X y por $C_p(X)$ el mismo espacio dotado de la topología de la convergencia puntual. Sea Y un subespacio de X, y sea $r : C(X) \to C(Y)$ la función "restricción", i.e. si $f \in C(X)$, $r(f) = f|Y$. Dar condiciones suficientes en X ó en Y de forma que :
   - La función r sea sobre.
   - La función r sea inyectiva.
   - ¿Es $r : C_p(X) \to C_p(Y)$ una función continua, sin condiciones adicionales en X ó en Y?

3. Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$ (con las topologías usuales).
   a) Estudiar la clausura de $C(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto, uniforme y de las cajas.
   b) Sea $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la aplicación identidad. Encontrar, si se puede, abiertos de la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que separen g y el conjunto A de las aplicaciones constantes de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

4. Sea $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (con la topología usual).
   a) Estudiar si $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de las topologías producto, y uniforme.
   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 1$ si $x \leq 0$ y $f(x) = 0$ si $x > 0$. Estudiar si esta aplicación está en la clausura de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ respecto de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

5. (Del examen de Septiembre 2002)

   a) Estudiar la clausura y el interior del conjunto
   $$\mathcal{A} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ acotada}\}$$
   en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología producto.

   b) Estudiar la clausura y el interior del conjunto
   $$\mathcal{B} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua y acotada}\}$$
   en $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ con la topología compacto-abierta.

6. Sea $C(I, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ dotado de la métrica uniforme,
   $$\rho(f, g) = sup\{|f(t) - g(t)|; t \in I\}.$$
   Estudia si las siguientes funciones son continuas :

   a) $\phi : C(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$.

   b) $\phi : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ definida por $f \mapsto \int_0^x f(t)dt$

7. Estudiar si son compactos los siguientes subconjuntos del espacio producto I^I:

   - $A = \{f \in I^I \mid f(0) = 0\}$
   - $B = \{f \in I^I \mid f \text{ continua y } f(0) = 0\}$

8. Un *k-espacio* es un espacio topológico (X, τ) que verifica la equivalencia:

   $C \subset X$ es cerrado en τ sí y sólo si $C \cap K$ es cerrado en $\tau_{|K}, \forall K \subset X$ compacto en τ.

   a) Probar que todo espacio métrico y todo espacio localmente compacto es un k-espacio.

   b) Sea (X, τ) un k-espacio y sea Y espacio topológico cualquiera. Si una aplicación $f : X \to Y$ es tal que $f_{|K}$ es continua para cualquier conjunto compacto $K \subset X$, probar que f es continua.

   c) Sea X un k-espacio e (Y, d) un espacio métrico. Probar que $C(X, Y)$ es cerrado en el espacio Y^X dotado de la topología de la convergencia uniforme en los compactos.

9. Sea X un espacio localmente compacto, Y espacio topológico cualquiera y $C_{co}(X, Y)$ el espacio de las funciones continuas dotado de la topología compacto-abierta. Probar que la evaluación $e : C(X, Y) \times X \to Y$ definida por $(f, x) \mapsto f(x)$ es continua (el primer espacio tiene la topología producto).

10. Sea $\omega\mathbb{R}$ el subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ (producto numerable de copias de $\mathbb{R}$) formado por las sucesiones eventualmente nulas. Probar que $\omega\mathbb{R}$ no es completo en la métrica uniforme. Hallar la clausura de $\omega\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$.