Problemas de topología. Hoja 8

26-V-2008

1. Sea X un espacio topológico compacto y T_2 y $C(X)$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas en X. Consideremos en $C(X)$ la topología uniforme definida por la métrica $d(f,g) = sup\{|f(x) - g(x)|, x \in X\}$. Probar que las aplicaciones "suma " y "producto" de $C(X)\times C(X) \to C(X)$, definidas por $(f,g) \mapsto f+g$, $(f,g) \mapsto f.g$ son aplicaciones continuas.

2. Se define $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{para } 0 \leq x \leq 1/2n, \\ -4n^2x + 4n & \text{para } 1/2n \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{para } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   Probar que la sucesión $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge puntualmente a la función idénticamente nula, pero no converge uniformemente.

3. Probar que el conjunto de las funciones de la forma

$$\Sigma_{k=0}^{\infty} c_k e^{kx}$$

   (siendo $c_k = 0$ para casi todo $k \in \mathbb{N}$) forman un conjunto denso en $C(I)$

   Indicación: Usar el teorema de Stone-Weierstrass.

4. Sea $\mathbb{T}$ el círculo unidad del plano complejo $\mathbb{C}$, y sea $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ el conjunto de las funciones continuas dotado de la topología uniforme. Probar que todo miembro de $C(\mathbb{T},\mathbb{C})$ puede aproximarse uniformemente por funciones del tipo

$$\Sigma_{k=-m}^{n} a_k z^k.$$

5. Sea f una función real continua definida en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Probar que f puede aproximarse uniformemente por funciones de la forma:

$$(1/2)a_0 + \Sigma_{k=0}^{n}(a_k coskx + b_k senkx).$$

6. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es continua y $\int_0^1 x^n f(x) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, probar que $f(x) = 0$ en I.

7. (Del examen de 2007) Sea $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dotado de la topología de la convergencia uniforme. Se considera el subespacio

$$E := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \{ \text{ tiene limite (finito) en } +\infty\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

con la topología inducida.

   (a) Demostrar que E es cerrado, pero no compacto, y que tiene interior vacío.

   (b) Demostrar que E es un anillo que contiene a las constantes y separa puntos pero, no obstante, no coincide con $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Contradice esto el teorema de Stone–Weierstrass?.

   (c) Demostrar que existe una aplicación continua $T : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$T(f) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$$

   para toda $f \in E$.

8. Designamos por $C(I, I)$ el conjunto de las funciones continuas del intervalo $I = [0, 1]$ dotado de la topología usual, en sí mismo. Comparar la topología de la convergencia puntual con la compacto-abierta en $C(I, I)$.

9. Sea $\{A_i; i \in I\}$ una familia localmente finita de subconjuntos de un espacio topológico X. Probar que la familia $\{\overline{A_i}; i \in I\}$ también es localmente finita.

10. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{M}$ una familia de subconjuntos cerrados, localmente finita y tal que $\cup\{M, M \in \mathcal{M}\} = X$. Probar que una aplicación $f : X \to Y$ (donde Y es un espacio topológico cualquiera) es continua si y solo si $f|_M$ es continua para todo $M \in \mathcal{M}$.

11. Probar que un espacio discreto es paracompacto. En consecuencia: la imagen continua de un espacio paracompacto no es necesariamente un espacio paracompacto.

12. Probar que la lnea de Sorgenfrey, $\mathbb{R}_s$, es un espacio paracompacto. Sin embargo $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ no lo es, y por tanto "ser paracompacto" no es propiedad multiplicativa.

13. Sea $\mathbb{S}$ el conjunto de los reales dotado de la topología cuyos abiertos son los subconjuntos de la forma $U \cup V$ dónde U es un abierto de $\mathbb{R}_u$ y V un subconjunto cualquiera de irracionales. Probar que el espacio $\mathbb{S}$ es paracompacto.