Examen de topología. (Segunda parte)

Resuelto por el alumno: Miguel Hernaiz

2-Julio-2008

1. Sea X el cuadrado cerrado unidad $[0,1]\times[0,1]$. Consideremos la topología τ en X dada por las bases de entornos $\mathcal{B}(s,t)$ que describimos continuación:

   - Para puntos de la diagonal $\Delta = \{(s,s), s \in X\}$, se definen los conjuntos $M_\epsilon(s,s)$ como bandas abiertas horizontales, centradas en (s,s) excluyendo de las mismas una cantidad finita de lineas verticales, es decir $M_\epsilon(s,s) = \{(x,y) \in X$ tales que $|y-s| < \epsilon, x \neq x_1,\ldots,x_n\}$. La familia $\mathcal{B}(s,s)$ consta de los conjuntos $M_\epsilon(s,s)$, al variar $\epsilon > 0$, y los conjuntos finitos $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset I$.
   - Para puntos (s,t) que no están en la diagonal, $\mathcal{B}(s,t)$ es la familia de los segmentos $N_\epsilon(s,t) = \{(s,y)$ tales que $|t-y| < \epsilon\}$.

   Estudiar:

   D) (**1 pto.**) Probar que (X,τ) es compacto.
   Escribimos

   $$M_\epsilon(s,s)\{x_1,\ldots,x_n\} = \{(x,y) \in X \text{ tales que } |y-s| < \epsilon, x \neq x_1,\ldots,x_n\}$$

   Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de X que suponemos básico. Puesto que los elementos de la diagonal quedan recubiertos por elementos de $\mathcal{U}$, existen $M_\epsilon(s,s)$ que recubren Δ. Si consideramos ahora sus proyecciones sobre el eje vertical obtenemos un recubrimiento abierto usual del intervalo $I = [0,1]$. Por ser I compacto en la usual, resulta que existe un número finito de abiertos de la forma $M_\epsilon(s,s)\{x_1,\ldots,x_n\}$ cuyas proyecciones recubren I. Si consideramos estos abiertos resulta que recubren todo X salvo un número finito de líneas verticales.
   Sean $\{x_1,\ldots,x_m\}$ las abscisas en las que faltan líneas verticales. Si consideramos, para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, las intersecciones de los abiertos de $\mathcal{U}$ con el segmento $I_i = \{x_i\} \times I$ obtenemos un recubrimiento por abiertos usuales del compacto (en la topología usual) I_i, del cual se pueden extraer un subrecubrimiento finito y así un número finito de abiertos de $\mathcal{U}$ de forma que I_i quede cubierto.
   Puesto que el número de segmentos por recubrir es finito se pueden

recubrir todos mediante un número finito de abiertos de $\mathcal{U}$ y, si añadimos los $M_\epsilon(s,s)$ anteriores, obtenemos que todo X se puede recubrir mediante un subrecubrimiento finito de $\mathcal{U}$ y que, en definitiva, X es compacto.

A) (**1.5 ptos.**) Los axiomas de separación para (X,τ).
Supongamos que X es T_2. Con esto tendremos trivialmente que es T_1 y T_0 y, al ser compacto, que es normal. Por otro lado, al ser T_1, los puntos son cerrados y por ser normal es completamente regular y regular.
Veamos que es T_2. Dos puntos que no estén en Δ son trivialmente separables mediante entornos básicos. Dos puntos de Δ (s,s) y (t,t) se separan cogiendo entornos abierto básicos $M_\epsilon(s,s)$ y $M_\epsilon(t,t)$ escogiendo, por ejemplo, $\epsilon = \frac{|s-t|}{2}$. Por último, dos puntos $(x,y) \notin \Delta$ y $(s,s) \in \Delta$ se separan tomando, por ejemplo, $N_1(x,y)$ y $M_1(s,s)\{x\}$.

B) (**1 pto.**) Describir la topología inducida por τ en la diagonal secundaria

$$\Delta' = \{(x, 1-x), x \in X\}$$

y estudiar si Δ' es un cerrado en X.
Dado un punto $(x,y) \notin \Delta$, resulta que tiene como entorno abierto, en Δ', $\{(x,y)\} = N_1(x,y) \cap \Delta'$; en cambio, el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in \Delta$ tiene entornos de la forma $M_\epsilon(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cap \Delta'$ que son abiertos de la topología usual de $\mathbb{R}^2$ inducida en Δ'.
Resumiendo, la topología inducida por τ en Δ' tiene como abiertos los conjuntos unipuntuales $\{(x, 1-x)\}$ para $x \neq 1/2$: los entornos de $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ son abiertos usuales.
Por otro lado, es fácil comprobar que $\Delta \subset \overline{\Delta'}$ y, como $\Delta \not\subseteq \Delta'$ resulta que Δ' no puede ser un cerrado.

C) (**1.5 ptos.**) Los axiomas de numerabilidad (I-numerable, II-numerable y separable).
Veamos primero que X no es I-numerable. Supongamos $\mathcal{B}$ una base numerable de entornos, que suponemos básicos, de un punto (s,s) cualquiera de Δ. Puesto que el número de líneas verticales eliminadas para cada entorno de $\mathcal{B}$ es finito, el conjunto de abscisas para las cuales se ha eliminado una línea vertical en algún entorno de $\mathcal{B}$ es numerable al ser unión numerable de conjuntos finitos de forma que existe $x_0 \in I \backslash \{s\}$, por ser I de cardinal no numerable, tal que el punto $(x_{0,}s)$ pertenece a todos los elementos de $\mathcal{B}$. En estas condiciones resulta claro que ningún elemento de $\mathcal{B}$ puede estar contenido dentro del entorno $M_1(s,s)\{x_0\}$ por lo que $\mathcal{B}$ no es base, en contra de lo supuesto.

Veamos ahora que X no es separable. En efecto, dados los puntos distintos de la forma $(x,1)$ con $x \neq 1$, los entornos abiertos $N_1(x,1)$ son disjuntos dos a dos de forma que dado un subconjunto denso D su cardinal debe ser al menos el del intervalo $[0,1)$ y por tanto de ninguna forma es numerable.
Por cualquiera de los párrafos anteriores X no puede ser II-numerable.

E) (**1 pto.**) ¿ Es metrizable?
X no puede ser metrizable al no ser ni siquiera I-numerable.

2. En el espacio $X := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ consideramos la familia $\mathcal{B} = \{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ donde los conjuntos F_n se definen por:

$$F_n = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ tales que } |f(x)| < 1/n, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

A) (**1 pto.**) Probar que $\mathcal{B}$ es base de filtro en X.
Dado que la función idénticamente nula, llamémosla por comodidad 0, pertenece a cada F_n ningún elemento de $\mathcal{B}$ es vacío; además, dados n y m, $F_n \cap F_m = F_{max(n,m)} \in \mathcal{B}$ por lo que $\mathcal{B}$ es base de filtro.

B) (**1.5 ptos.**) Si se considera en X la topología producto (cada copia de $\mathbb{R}$ tiene la topología usual), hallar la adherencia y los puntos límite del filtro engendrado por $\mathcal{B}$.
Sea $\mathcal{F}$ el filtro engendrado por B.
Veamos que $\overline{F_n} = [-1/n, 1/n]^{\mathbb{R}}$. En efecto, consideremos el caso extremo de $f = \frac{1}{n} \in [-1/n, 1/n]^{\mathbb{R}}$ y tomemos, sin pérdida de generalidad, un entorno abierto de f de la forma

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} p_{x_i}^{-1}(\frac{1}{n} - \epsilon_i, \frac{1}{n} + \epsilon_i)$$

Es claro que $g = \frac{1}{n} - \frac{\epsilon_0}{2} \in V \cap F_n = V \cap (-1/n, 1/n)^{\mathbb{R}}$ siendo $\epsilon_0 = min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$. Por otro lado, si es $f \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^{\mathbb{R}}$ tenemos que $\exists x_0 \in \mathbb{R} : |f(x_0)| > \frac{1}{n}$ y por tanto

$$V = p_{x_0}^{-1}(f(x_0) - \frac{|f(x_0)| - 1/n}{2}, f(x_0) + \frac{|f(x_0)| - 1/n}{2}) \in E_{\tau_\pi}(f)$$

cumple que $V \cap F_n = \emptyset$, luego $f \notin \overline{F_n}$.
Por último, $Aglo(\mathcal{F}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} = \{0\}$.
Ahora, puesto que $Lim(\mathcal{F}) \subset Aglo(\mathcal{F}) = \{0\}$, sólo queda estudiar si $\mathcal{F} \to 0$. Dado un entorno cualquiera del 0 que suponemos básico

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} p_{x_i}^{-1}(-\epsilon_i, \epsilon_i)$$

tenemos, siendo $\epsilon_0 = min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$, que existe n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon_0$ y así $F_{n_0} \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{F}$ y en definitiva, $E_{\tau_\pi}(0) \leq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \to 0$.

C) (**1 pto.**) La misma cuestión de B) si en lugar de la topología producto se considera la topología de las cajas.
Veamos que sigue siendo $\overline{F_n} = [-1/n, 1/n]^{\mathbb{R}}$. Volvemos a estudiar el caso $f = \frac{1}{n} \in [-1/n, 1/n]^{\mathbb{R}}$ y consideramos un entorno suyo cualquiera que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, de la forma

$$V = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} p_x^{-1}(\frac{1}{n} - \epsilon_x, \frac{1}{n} + \epsilon_x)$$

Resulta claro que $g : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{\epsilon_x}{2} \in V \cap F_n$ y por lo tanto tenemos que $f \in \overline{F_n}$.
En el otro sentido, dado $f \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^{\mathbb{R}}$ tenemos que f no puede pertenecer a la adherencia de F_n con τ_b ya que ni siquiera lo hacía con τ_π que es menos fina.
Finalmente, $Aglo(\mathcal{F}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n} = \{0\}$.
Veamos ahora que $Lim(\mathcal{F}) = \emptyset$. Al igual que en B), basta estudiar si $\mathcal{F} \to 0$. Ahora,

$$V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |f(x)| < min(1, |\frac{1}{x}|) \forall x\}$$

es entorno de 0 con τ_b y sin embargo la función $g : x \mapsto \frac{1}{2n}$ no está en V ya que $g(3n) = \frac{1}{2n} \not< \frac{1}{3n}$ por lo que $F_n \nsubseteq V$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y por tanto, $E_{\tau_b}(0) \nleq \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F} \nrightarrow 0$.