Segundo examen parcial de Estructuras Algebraicas.

10-I-2013

1. Enunciar y probar el primer teorema de isomorfía para grupos.

2. • Definir el concepto de ”acción” de un grupo en un conjunto.

   Una acción de un grupo G en un conjunto X es una aplicación $\varphi : G \times X \to X$ (por comodidad designamos $g \cdot x$ a $\varphi(g, x)$), que verifica las siguientes condiciones:

   1. $1_G \cdot x = x$ para cualquier $x \in X$.
   2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$, para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$ y $x \in X$.

   • Si un grupo G actúa en un conjunto X, establecer un homomorfismo Θ del grupo G en el grupo de las biyecciones de X. Dar una condición necesaria y suficiente para que Θ sea isomorfismo sobre su imagen.

   Sea $\Theta : G \to Biy(X, X)$ definido de la siguiente manera: $\theta_g : x \mapsto g \cdot x$. Obsevamos que $\theta_{g_1 g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$, para $g_1, g_2 \in G$. En efecto $\theta_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1.(g_2 \cdot x) = \theta_{g_1}(g_2 \cdot x) = \theta_{g_1}(\theta_{g_2}(x)) = (\theta_{g_1} \circ \theta_{g_2})(x), \forall x \in X$.
   i) θ_g es una biyección para todo $g \in G$ ya que tiene inversa por la derecha y por la izquierda. En efecto: $\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \theta_e = 1_G$ (hemos usado las condiciones 2. y 1. de la definición de ”acción) y análogamente $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g = 1_G$.
   ii) $\theta_{g_1 g_2} = \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}$, es decir, Θ es un homomorfismo.
   Para que sea isomorfismo sobre su imagen, es suficiente que Θ sea inyectiva; equivalentemente, $ker(\Theta) = \{e_G\} = \{g \in G$ tales que $g \cdot x = x$ para todo $x \in X\}$. Es decir, $\cap_{x \in X} G_x = \{e\}$.

   • Relacionar los conceptos del apartado anterior con el teorema de Cayley.

   Teorema de Cayley (TC): Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo del grupo de sus biyecciones $Biy(G)$, dotado éste de la composición de aplicaciones.
   El TC es un corolario de la existencia del homomorfimo Θ en la afirmación anterior. Si tomamos $X = G$ y definimos la acción $G \times G \to G$ mediante $g \cdot x = gx$ (se puede, pués G es grupo y tiene sentido la composición $gx, \forall g, x \in G$), obtenemos el teorema de Cayley, ya que en este caso Θ es inyectiva. (De hecho $gx = x$ -para un solo x- ya implica $g = e$ por la ley de cancelación en grupos)

3. Hallar -salvo isomorfismos- todos los grupos abelianos de orden 168.

   Primero descomponemos 168 en sus factores primos. Obtenemos que $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Consideramos todas las posibles descomposiciones en productos; recordando que $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}_{pq} \Longleftrightarrow p$ y q son primos entre sí. Por tanto, solamente tendremos que ver las posibilidades que nos ofrece el 2^3. Así tenemos:

   - $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$
   - $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$
   - $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$

4. - Sea G un grupo (no abeliano) de orden 168 que posee un subgrupo normal H de orden 4. Probar que el cociente G/H posee un subgrupo normal N de orden 7.

     Aplicamos el tercer teorema de Sylow al cociente G/H. Sabemos que $ord(G/H) = 42$. Así; por un lado, $s_7(G/H)$ divide a 6, y por otro lado $s_7(G/H) \equiv 1 (mod 7)$. La única posibilidad es que $s_7(G/H) = 1$. Por tanto este subgrupo de orden 7 es normal.

   - La antiimagen $\pi^{-1}(N)$, dónde $\pi : G \to G/H$ designa la proyección canónica es un subgrupo normal de G.

     Directamente se prueba que $\pi^{-1}(N)$ es subgrupo, ya que $a, b \in \pi^{-1}(N) \Rightarrow ab^{-1} \in \pi^{-1}(N)$. En efecto, π es homomorfismo y $\pi(ab^{-1}) = \pi(a)\pi(b)^{-1} \in N$. Es normal: Si $a \in \pi^{-1}(N)$ y $x \in G$, entonces $xax^{-1} \in \pi^{-1}(N)$ ya que $\pi(xax^{-1}) = \pi(x)\pi(a)\pi(x)^{-1} \in N$, por ser N normal.

   - G contiene un subgrupo normal de orden 28.

     Por el apartado 2, $\pi^{-1}(N)$ es un subgrupo normal de G. Si vemos que su orden es $7 \cdot 4 = 28$ obtenemos el resultado pedido.
     Tener en cuenta que $\pi^{-1}(N)/H \approx N$ (Basta aplicar el primer teorema de isomorfía al homomorfismo restricción de π , $\pi^{-1}(N) \to N$). Por tanto

     $$|\pi^{-1}(N)/H| = 7$$

     y de ahí obtenemos $|\pi^{-1}(N)| = 28$.

5. Estudiar si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   - Existen 8 homomorfismos de $\mathbb{Z}_{20}$ en $\mathbb{Z}_{20}$
     En realidad existen 20 homomorfismos posibles, ya que $\mathbb{Z}_{20}$ es un grupo cíclico y un homomorfismo viene definido por la imagen de un generador. Puede tomar 20 valores distintos la imagen del generador, (al ser el grupo de llegada el mismo, no hay restricciones).
   - No existen epimorfismos de D_4 en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ (D_4 es el grupo diedral de los movimientos del cuadrado.)

Al tener ambos grupos orden 8, un epimorfismo ha de ser también inyectivo. Es decir, sería un isomorfismo. Pero el primer grupo no es abeliano y el segundo sí: ésto implica que no puede haber un isomorfismo entre ellos.