Examen final de Estructuras Algebraicas.

8-II-2013

1. Responder a las siguientes cuestiones.

   a) Probar que en el grupo $\mathbb{Z}$ de los enteros, todos los subgrupos son de la forma $m\mathbb{Z}$ para cierto número natural m.

   b) Si H_1 y H_2 son subgrupos de $\mathbb{Z}$, dar la forma explícita de $H_1 \cap H_2$ y de $H_1 + H_2$ (de acuerdo con el apartado $a)$).

   c) Si se considera $\mathbb{Z}$ como un anillo, hallar todos los ideales de $\mathbb{Z}$ indicando cuáles son ideales primos y cuáles son ideales maximales.

   d) Estudiar para qué valores de $m \in \mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}_m$ un cuerpo.

2. Sean H, L subgrupos normales de un grupo G, tales que $HL = G$ y $H \cap L = \{0\}$. Probar que $H \times L$ es isomorfo a G. ¿ Es cierta la afirmación en el caso en que solamente uno de ellos sea normal?.

3. a) Dadas las matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ de $GL(2, \mathbb{Z})$, probar que $A^4 = 1$, $B^3 = 1$ y AB tiene orden infinito.

   b) Sea G un grupo cualquiera. Si dos elementos $a, b \in G$ conmutan y $ord(a) = n$ y $ord(b) = m$, probar que $ord(ab) \mid m.c.m.(n, m)$.

   Extraer alguna consecuencia de las dos afirmaciones anteriores.

4. Sea G un grupo.

   a) Definir el centro $Z(G)$ de G.

   b) Obtener $Z(G)$ como conjunto de puntos fijos de una acción de G sobre G. (Definir dicha acción)

   c) Supongamos que G verifica la siguiente condición: "existe un número entero $n \geq 2$ y $a \in G$ de modo que a es el único elemento de orden n". Probar que $a \in Z(G)$ y calcular el valor de n.

5. Describir una lista completa de grupos abelianos de orden 360, no isomorfos dos a dos.

6. Probar que los 3-ciclos generan el grupo alternado $\mathcal{A}_5$. Probar que $\mathcal{A}_5$ es un subgrupo normal de $\mathcal{S}_5$. ¿ Cuántos homomorfismos hay de $\mathbb{Z}_3$ en $\mathcal{A}_5$? ¿Son todos inyectivos?

7. ¿Cuántos elementos de orden 7 hay en un grupo **simple** de orden 168 ?

8. Definición de ideal, y de ideal principal. Sea K un cuerpo. ¿Puede K contener ideales no triviales? Probar que todos los ideales del anillo $K[x]$ son principales.

9. Sea $h(x)$ un polinomio mónico con coeficientes enteros, y p un número primo. Si $h(x)$ es irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$, ¿ es también irreducible en $\mathbb{Z}[x]$?.

   Probar que el polinomio x^2+1 es reducible el $\mathbb{Z}_{17}[x]$, pero no es reducible en $\mathbb{Z}[x]$.

10. Sea $A \subset \mathbb{Q}^{2\times 2}$ el subanillo de matrices definido por:

$$A := \{ \begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}, \text{ con } z \in \mathbb{Z} \text{ y } a \in \mathbb{Q} \}$$

   a) Probar que todo ideal primo de A contiene a los elementos de la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{Q}$ y que estos elementos constituyen un ideal J de A.

   b) Probar que A/J es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Calcular los ideales primos de A.

LOS ALUMNOS QUE SE PRESENTAN A TODO EL CURSO DEBEN HACER LOS EJERCICIOS DEL 1 AL 9.

LOS ALUMNOS QUE LIBERARON LA PARTE DE GRUPOS DEBEN REALIZAR LOS APARTADOS $c), d)$ DEL EJERCICIO 1, Y LOS EJERCICIOS 8,9 Y 10 ENTEROS.

DURACIÓN DEL EXAMEN: 3 HORAS.