Estructuras algebraicas. Hoja 1

3-Octubre-2013

1. Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Probar las siguientes equivalencias:

   i) f es suprayectiva $\Longleftrightarrow$ Para todo $N \subset Y$ se cumple $f(f^{-1}(N)) = N$.

   ii) f es inyectiva $\Longleftrightarrow$ Para todo $M \subset X$ se cumple $f^{-1}(f(M)) = M$.

2. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ aplicaciones tal que $f \circ g = 1_Y$. Probar que f es suprayectiva y g es inyectiva.

3. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto X. Demostrar que
$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C)$$
   Hallar una condición necesaria y suficiente para que se dé la igualdad.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n el intervalo cerrado $[0, 1/n] \subset \mathbb{R}$. Probar que:
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

5. Estudiar si las siguientes relaciones binarias son relaciones de equivalencia:

   a) En el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, nRm si $nm < 0$

   b) En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, xRy si y solo si $|x| = |y|$. La misma pregunta en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos. Estudiar las clases de equivalencia.

   c) En $\mathbb{R}$, xRy si $x \geq y$.

   d) En $\mathbb{R}$, xRy si $|x - y| > 3$.

   e) En $\mathbb{Z}^+$, nRm si $n - m$ es divisible por 2.

6. Probar:
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

7. Probar:
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

8. Probar que
$$2^n > n^3, \text{ para todo } n \geq 10$$

9. Probar que el conjunto de los números primos es infinito.

10. Determinar si cada una de las definiciones de $*$ en los conjuntos que se indican son operaciones binarias:

    i) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b := a - b$.

    ii) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b := a^b$.

    iii) En $\mathbb{R}$, $a * b := a - b$.

    iv) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b = c$, siendo c el menor entero mayor que a y b.

    v) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b = c$, siendo c al menos 5 unidades mayor que $a + b$.

11. Estudiar si son asociativas o conmutativas las siguientes operaciones binarias:

    i) En $\mathbb{Z}$, $a * b := a - b$.

    ii) En $\mathbb{Q}$, $a * b := ab + 1$.

    iii) En $\mathbb{Q}$, $a * b := ab/2$.

    iv) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b := 2^{ab}$.

    v) En $\mathbb{Z}^+$, $a * b := a^b$.

12. En $X := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ definimos la operación $*$ mediante:

    $$a * b := a + b + ab.$$

    Probar:
    i) $*$ es una operación binaria en X.

    ii) $(X, *)$ es un grupo.

    iii) Resolver en X la ecuación: $2 * x * 3 = 7$.

13. Sea G un conjunto y sea $*$ una operación binaria asociativa en G que cumple:
    1) Existe un elemento $e \in G$ tal que $e * x = x$ para todo $x \in G$ (e se denomina identidad a izquierda).

    2) Para cada $x \in G$ existe un inverso a izquierda de x, es decir un elemento x' tal que $x' * x = e$.

    Probar que $(G, *)$ es un grupo.

14. Sea $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y sea $*$ la operación definida por:

    $$a * b := |a|b.$$

    Probar:

    i) $*$ es una operación binaria asociativa.

    ii) Existe una identidad a izquierda para $*$ y un inverso derecho para cada elemento de $\mathbb{R}^*$.

    iii) ¿ Es $(R^*, *)$ un grupo?.

15. Sea $(G, *)$ un grupo y sea x' el elemento inverso de x, para cualquier $x \in G$. Probar que para todo $a, b \in G$ se verifica $(a * b)' = b' * a'$.

16. Estudiar cuántas estructuras de grupo puede admitir un conjunto con 4 elementos.