Estructuras algebraicas. Hoja 2

11-Octubre-2013

1. Sea G un grupo y $a \in G$ un elemento de orden n. Si $a^k = 1$, probar que $n|k$.

2. Sean H y K subgrupos de un grupo G y mcd $(|H|, |K|) = 1$. Probar que $H \cap K = \{e_G\}$.

3. Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico de orden n. Probar que a^k es un generador de G si y solo si mcd $(k, n) = 1$.

4. Sea G un grupo, y sean $a, b \in G$ dos elementos que conmutan. Si $a^m = 1$ y $b^n = 1$ probar que $(ab)^k = 1$ siendo k el mínimo común múltiplo de m y n. Probar que si ord $a = m$, ord $b = n$ y m, n son primos entre sí, entonces ord $ab = k = mn$ (El orden de ab puede ser menor que k, por ejemplo si $b = a^{-1}$). Dar un ejemplo de grupo con dos elementos a, b tales que $ab = ba$ y ord ab no sea el producto de los órdenes de a y b.

5. Estudiar si los siguientes grupos son cíclicos y en caso afirmativo mostrar los generadores:
   $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$, $G_2 = (\mathbb{Q}, +)$, $G_3 = (\mathbb{T}, \times)$, $G_4 = (6\mathbb{Z}, +)$
   $G_5 = \{6^n, n \in \mathbb{Z}\}$ con la operación producto $\times$
   $G_6 = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ con la operación suma.

6. Probar que si un grupo cíclico G admite un único generador, entonces G es de orden 2.

7. Sea G un grupo abeliano y sea e su elemento neutro. Probar que el conjunto $H := \{x \in G, x^2 = e\}$ es un subgrupo de G.

8. Sea G un grupo y a un elemento de G. Probar que

   $$M_a := \{x \in G |\ xa = ax\}$$

   es un subgrupo de G.

   Para $S \subseteq G$ cualquiera, probar que $M_S := \{x \in G |\ xs = sx, \forall s \in S\}$ también es subgrupo de G.

   Si $S = G$ el conjunto M_G se denomina el centro de G. Probar que M_G es abeliano.

9. Designemos por $GL(2, \mathbb{R})$ (grupo lineal general) el conjunto de las matrices 2×2 de coeficientes reales y determinante no nulo dotado del producto ordinario de matrices. Probar que es un grupo y estudiar si los siguientes subconjuntos de $GL(2, \mathbb{R})$ son subgrupos y en caso afirmativo, si son normales:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ con $\alpha\gamma - \beta\delta = 1$;

10. Sea $G := GL(2, \mathbb{Q})$ y sean

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Probar que $A^4 = I = B^3$, donde I designa la matriz identidad. Sin embargo $(AB)^n \neq I$ for all $n > 0$. Observar en consecuencia que un producto puede tener orden infinito aunque los factores sean de orden finito. (Comparar este resultado con el del ejercicio 4).

11. Probar que el conjunto Γ de las matrices de la forma:

$A := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ forman un subgrupo de $SL(2, \mathbb{Q})$ (grupo de las matrices de orden 2 con coeficientes racionales y determinante no nulo, considerado con el producto ordinario de matrices).

¿Es conmutativo?.

12. Si H, K designan subgrupos de un grupo G, probar que los conjuntos $H \cup K$ y $HK := \{hk; h \in H, k \in K\}$ no son necesariamente subgrupos de G. Al subgrupo $\langle H \cup K \rangle$ se le denomina $H \bigvee K$. Probar que HK es un subgrupo de G si y sólo si $HK = KH$, y en ese caso coincide con $H \bigvee K$.

13. Designemos por $(\mathbb{Q}^+, \times)$ el grupo multiplicativo de los números racionales positivos. Describir el elemento neutro y probar que $(\mathbb{Q}^+, \times)$ está generado por el conjunto $S = \{1/p, p \in \mathbb{P}\}$ dónde $\mathbb{P}$ designa el conjunto de los números primos.