Estructuras algebraicas. Hoja 4

25-Octubre-2013

1. Sean G y H grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo. Probar:
   - Si $a, b \in G$ conmutan, también lo hacen sus imágenes $f(a), f(b)$.
   - Si f es además inyectiva y sobre, entonces G es abeliano si y sólo si H es abeliano.
   - ¿Existe alguna relación entre el orden de $a \in G$ el orden de $f(a)$?. Distinguir los casos f homomorfismo y f isomorfismo.

2. Sea $(G, *)$ un grupo, y $a \in G$. Probar que la aplicación $f_a : G \to G$ definida por $x \mapsto a * x * a^{-1}$ es un isomorfismo.

3. ¿Cuáles de las aplicaciones siguientes son homomorfismos de grupos? Para las que lo sean encontrar el núcleo y la imagen. (C_n denota un grupo cíclico de orden n)
   - $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $f([x]_{12}) = [x+1]_{12}$;
   - $f : C_{12} \to C_{12}$, $f(g) = g^3$;
   - $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2$, $f([x]_8) = [x]_2$.

4. Probar que el siguiente subgrupo de S_4

$$V := \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

   es isomorfo al producto de los subgrupos $H := \{id, (12)(34)\}$ y $K := \{id, (13)(24)\}$, y por tanto a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5. Determinar todos los homomorfismos de grupos de $(\mathbb{Z}_9, +)$ en $(\mathbb{Z}_3, +)$.

6. Dado el homomorfismo de grupos $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $f(z) = z^7$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, determinar $\mathsf{ker}(f)$ e $\mathsf{Im}(f)$.

7. Sean G_1 y G_2 dos grupos de órdenes 24 y 7, respectivamente. ¿Existe un epimorfismo de G_1 en G_2? ¿Existe un monomorfismo de G_2 en G_1?

8. Sea $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$ la aplicación definida por $f([x]_6) = [x]_3$. Demostrar que f es homomorfismo de grupos, calcular $\mathsf{ker}(f)$, $\mathsf{Im}(f)$ y $\mathbb{Z}_6/\mathsf{ker}(f)$.

9. Demostrar que el conjunto G de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{Z}$, con el producto de matrices como operación, es un grupo abeliano. Demostrar que G y $\mathbb{Z}$ son isomorfos.

   Demostrar también que el conjunto G_1 de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1-2n & n \\ -4n & 1+2n \end{pmatrix}$ $n \in \mathbb{Z}$, es un grupo con el producto. ¿Son isomorfos G y G_1?.

10. **El grupo de los conmutadores**. Sea G un grupo. Un elemento de G de la forma $aba^{-1}b^{-1}$ con $a, b \in G$ se denomina un conmutador y se escribe $[a, b]$. Probar:
    - El inverso de un conmutador es un conmutador.
    - El subgrupo engendrado por todos los conmutadores de G se denomina el grupo derivado de G, $\delta(G)$. Probar que $\delta(G)$ es subgrupo normal de G.
    - $G/\delta(G)$ es abeliano.

11. Sea H un subgrupo de G que contiene al conmutador de G, δG. Probar que $H \trianglelefteq G$.

12. **Aplicación determinante** Δ. Sea $\Delta : \mathcal{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ la aplicación que asigna a cada matriz cuadrada de orden n su determinante. Probar que Δ es un homomorfismo. Hallar $\mathsf{ker}(\Delta)$, $\mathsf{Im}(\Delta)$. Probar que:

$$\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})/\mathcal{SL}(n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^*.$$

    ($\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ designa el grupo lineal general, i.e. el grupo de las matrices de orden n, de coeficientes reales y de determinante no nulo. Asmismo $\mathcal{SL}(n, \mathbb{R})$ designa el grupo lineal especial, i.e. el subgrupo de $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ formado por las matrices de determinante 1.)

13. Designamos por R^* a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\times$ la multiplicación ordinaria en $\mathbb{R}$. Asímismo $\mathbb{C}^*$ designa el conjunto de los números complejos menos el $\{(0, 0)\}$. Probar:
    1) El grupo $(\mathbb{R}^*, \times)$ no es isomorfo a $(\mathbb{R}, +)$.
    2) $\mathbb{C}^*$ con la multiplicación ordinaria de complejos es un grupo que no es homeomorfo a $(\mathbb{R}^*, \times)$.

14. Sea $\mathbb{T}$ el círculo unidad del plano complejo, dotado del producto ordinario de complejos. Probar que la aplicación $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ definida por $z \mapsto z^2$ es un homomorfismo sobreyectivo (epimorfismo). Hallar su núcleo.

15. Sean S, T subgrupos de un grupo finito G. Probar que si S o T es normal, se cumple la igualdad:

$$|S||T| = |S \cap T||S \vee T|$$