Estructuras algebraicas. Hoja 6

28-Noviembre-2013

1. (a) Sean G y H dos grupos, $x \in G$ con $\mathsf{ord}(x) = n$ e $y \in H$ con $\mathsf{ord}(y) = m$. Demostrar que el orden del elemento $(x, y) \in G \times H$ es el mínimo común múltiplo de n y m.
   (b) ¿Qué órdenes pueden tener los elementos del grupo aditivo $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$? Encontrar un elemento de cada orden posible.
   (c) Sea G un grupo, H y K subgrupos finitos de G de órdenes h y k, respectivamente. ¿Qué orden puede tener el subgrupo $H \cap K$?
   (d) Si $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$, $H =< ([5]_6, [5]_{10}) >$ y $K =< ([3]_6, [1]_{10}) >$. Calcular $H \cap K$.

2. ¿Cuáles de las aplicaciones siguientes son homomorfismos de grupos? Para las que lo sean encontrar el núcleo y la imagen. (C_n denota un grupo cíclico de orden n)

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $f(x) = ([x]_2, [x]_4)$;
   (b) $f : C_2 \times C_3 \to S_3$, $f(h^r, k^s) = (1, 2)^r(1, 2, 3)^s$, siendo h generador de C_2 y k generador de C_3;
   (c) $f : S_n \to S_{n+1}$, $f(\sigma)$ es la permutación dada por $i \mapsto \sigma(i)$ para $i \leq n$ y $n + 1 \to n + 1$.

3. Sea $f : \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_6$ definida por $f([n]_{30}, [m]_2) = ([n]_{10}, [4n+3m]_6)$. Probar que f es aplicación. ¿Es un isomorfismo de grupos?

4. Sean G un grupo y $f : G \to G$ un homomorfismo de grupos tal que $f^2 = f$. Ponemos $H = \mathsf{ker} f$ y $K = \mathsf{Im} f$.

   (a) Para cada $x \in G$, probar que $x(f(x))^{-1} \in H$. Deducir que $G = HK$.
   (b) Probar que $H \cap K = \{e\}$.
   (c) Si K es subgrupo normal de G, demostrar que los grupos $H \times K$ y G son isomorfos.

5. (a) Demostrar que el grupo $\mathbb{Z}_{10}$ es suma directa de $H = \{\overline{0}, \overline{5}\}$ y $K = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}\}$.
   (b) Demostrar que el grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$ no se puede escribir como suma directa de dos subgrupos de orden 2.
   (c) Demostrar que el grupo $(\mathbb{Z}_8, +)$ no se puede escribir como suma directa de dos subgrupos no triviales.

6. Señalar cuáles de los siguientes grupos son cíclicos, y para los que lo sean dar un generador.

$$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_5\,, \quad \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_4\,, \quad \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_2\,, \quad \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_2\,.$$

7. ¿Es $\mathbb{Z}_{75} \oplus \mathbb{Z}_{14} \oplus \mathbb{Z}_{24}$ isomorfo a $\mathbb{Z}_{126} \oplus \mathbb{Z}_{200}$?

8. Hallar todas las clases de isomorfía de grupos abelianos de orden 200. Escribir sus factores invariantes. Estudiar en cuáles de las clases existe un elemento de orden 20, y en caso de que exista, dar un ejemplo.

9. Sea G un grupo abeliano finito. Se llama *exponente* de G al mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de G.

   (a) Dar un ejemplo de un grupo G con exponente $\mathsf{exp}(G) = 6$.

   (b) Probar que si $\mathsf{exp}(G) = n$ entonces G tiene un elemento de orden n. Concluir que $\mathsf{exp}(G)$ es el orden máximo de los elementos de G.

   (c) Dar un ejemplo de un grupo no abeliano H que no tenga elementos cuyo orden sea el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de H.

10. Si un grupo finito G actúa en un conjunto X, el número de elementos de una órbita es un divisor de $|G|$.

11. Sea G un grupo finito y $x \in G$. Probar que la clase de conjugación de x en G es un divisor de $|G|$.

12. Sea σ un 5-ciclo en en S_5. Hallar el cardinal de la clase de conjugación de σ en S_5 y en A_5.