Estructuras algebraicas. Hoja 7

5-Diciembre-2013

1. Probar que un grupo G de orden 20 contiene un subgrupo normal de orden 5. Probar que todo grupo de orden 30 tiene algún subgrupo normal.

2. Hallar el máximo número de grupos no isomorfos de orden 99. Para cada grupo de orden 99, determinar el número de elementos de orden 3.

3. Sean p y q primos distintos, con $p < q$. Probar que todo grupo G de orden pq tiene un sólo subgrupo de orden q, que es normal en G. Si q no es congruente con 1 módulo p, G es abeliano y cíclico.

4. Sea G un grupo finito de orden p^2, con p un número primo. Probar que G es abeliano y por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ ó a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

5. Supongamos que un grupo G de orden 77 actúa en un conjunto X que tiene 24 elementos. Probar que existen al menos dos puntos fijos.

6. Probar que si H, K son subgrupos de un grupo finito G, se verifica la relación:
$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

7. (Del Examen de Enero 2012) Sea G un grupo (no abeliano) de orden 168 que posee un subgrupo normal H de orden 4.
   - Probar que el cociente G/H posee un subgrupo normal N de orden 7.
   - La antiimagen $\pi^{-1}(N)$, dónde $\pi : G \to G/H$ designa la proyección canónica, es un subgrupo normal de G.
   - G contiene un subgrupo normal de orden 28.

8. **El grupo de los cuaterniones.**

   Consideremos el grupo Q engendrado por las matrices $\{A, B\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ (con el producto como operación):

   $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

   Probar:
   - Q tiene 8 elementos.

- Hay un único subgrupo de orden 2 en Q.
- Todo subgrupo de Q es subgrupo normal.
- Una presentación de Q puede definirse por:

$$\{A, B | A^4 = 1, A^2 = B^2, AB = BA^3\}$$

9. Probar que el grupo diedral D_4 no es isomorfo a Q, grupo de los cuaterniones. Por otra parte, todo grupo no abeliano de orden 8 es isomorfo a uno de los dos, a Q o bien a D_4.

10. Sean G y H grupos y $f : G \to H$ un homomorfismo suprayectivo. Probar que $f(G^{(n)}) = H^{(n)}$ y por tanto si G es resoluble, también lo es H.

11. Probar que si G es un grupo resoluble, también son resolubles sus subgrupos y sus cocientes.

12. Sea G un grupo, y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal y resoluble, tal que G/N es también resoluble. Probar que G es resoluble.

13. Probar que todo p-grupo es resoluble. (Orientación: Suponer que $|G| = p^k$ y argumentar por inducción relativa a k).

14. Hallar todos los p-subgrupos de Sylow de S_3, A_3, S_4 y A_4.