Estructuras algebraicas. Hoja 9

13-Enero-2014

1. 1) Hallar los ideales primos y los ideales maximales del anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros.
   2) Hallar un ideal maximal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, un ideal primo que no sea maximal y un ideal propio que no sea primo.
   3) Describir todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$, y de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

2. Dar un ejemplo de homomorfismo f entre dos anillos unitarios R y S tal que $f(1_R) \neq 1_S$.

3. Hallar todos los homomorfismos de anillos de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.

4. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es un anillo isomorfo al anillo de matrices $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Sea $H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$. Estudiar si la aplicación definida por $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto a$ es un homomorfismo de anillos.

6. ¿Es la aplicación de $\mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $x \mapsto 2x$ un homomorfismo de anillos?

7. Sea R un anillo unitario y sea $f : \mathbb{Z} \to R$ definido por $f(n) = 1 + \overset{n}{\cdots} + 1$. Probar:
   1) f es homomorfismo de anillos.
   2) Si R tiene característica n, entonces R contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Si tiene característica 0, R contiene un subanillo isomorfo a $\mathbb{Q}$.
   3) Si R es cuerpo entonces su carcterística ha de ser 0 o bien un número primo.
   4) Todo cuerpo R contiene un subcuerpo F que es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$ (con p primo) o bien al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los racionales.

      Los cuerpos $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Q}$ se denominan cuerpos primos.

8. Sea R un anillo conmutativo de característica un número primo p. Probar que la aplicación de Frobenius definida por $x \mapsto x^p$ es un homomorfismo de anillos de R en R.

9. Sea D un dominio de integridad. Una aplicación $N : D \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ que cumple:
   1) $N(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$
   2) $N(xy) = N(x)N(y)$, $\forall x, y \in D$,

se denomina una **norma multiplicativa** en D. Probar:

$N(u) = 1$ para toda unidad u de D. Si las unidades son precisamente todos los elementos con norma 1 y $N(a) = p$ siendo p primo, probar que a es irrreducible en D. Probar asímismo que todo elemento $x \in D$ que no sea una unidad posee una descomposición en factores irreducibles.

10. Sea $R = \{a + bi\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y sea $N(a + bi\sqrt{3}) = a^2 + 3b^2$. Probqar que N es una norma multiplicativa en R y estudiar si $1 + i\sqrt{3}$ y $1 - i\sqrt{3}$ son irreducibles en R.