Estructuras de grupo topológico en $(\mathbb{Z}, +)$[1]

D. de la Barrera y E. Martín Peinador
Departamento de Geometría y Topología. Universidad Complutense de Madrid.
{dbarrera, peinador}@mat.ucm.es

Resumen

En este trabajo hemos considerado la complejidad de las posibles estructuras de grupo topológico en el grupo de los enteros. Compendiamos algunos resultados nuestros y de otros matemáticos para presentar en $\mathbb{Z}$:

1. *Una familia de $2^{\mathfrak{c}}$ topologías de grupo precompactas (no compactas) y Hausdorff .*
2. *Una amplia familia de topologías de grupo metrizables (no completas, ni precompactas).*
3. *Una amplia familia de topologías completas no metrizables.*

Dejamos algunas cuestiones abiertas - por ejemplo el problema de la cardinalidad de las familias especificadas en (2) *y* (3)*-, que estamos estudiando y forman parte de la Tesis Doctoral del primer autor.*

En homenaje al Profesor J.J. Etayo con afecto y admiración.

Introducción

La proverbial frase de Kronecker "los enteros los hizo Dios, los demás números son cosa del hombre"[2] quiere resaltar la belleza y la sencillez de los números enteros. Sin embargo, dotar a su conjunto $\mathbb{Z}$ de

[1] Parcialmente financiado por el MICINN. Proyecto: MTM2009-14409-C02-01.

[2] Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk, Kronecker (1823-1891)

una estructura de grupo topológico es una operación de enorme complejidad. Describimos a lo largo de este artículo diversos modos de topologizar $\mathbb{Z}$ de forma que las operaciones suma ordinaria y "tomar inverso" sean aplicaciones continuas, dando lugar así a grupos topológicos con conjunto soporte los números enteros.

Los grupos topológicos fueron introducidos por Schreier en 1926, en un contexto en el que ya se conocían los grupos de Lie (grupos continuos de transformaciones). Hacia los años 30 del siglo pasado hubo una actividad muy fructífera en grupos topológicos: de esa época datan los trabajos de Weyl, la introducción de la medida de Haar y los trabajos de Pontryagin estableciendo el Teorema de la dualidad de grupos topológicos localmente compactos abelianos, que es la piedra angular para el análisis armónico. Un grupo importante en este contexto es el toro $\mathbb{T}$, grupo de los complejos módulo uno, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{C}$. En efecto, $\mathbb{T}$ es el objeto dualizante en la teoría de dualidad de Pontryagin. Los homomorfismos de un grupo abeliano cualquiera G en $\mathbb{T}$ se denominan caracteres, y su conjunto $Hom(G, \mathbb{T})$ constituye un grupo respecto de la operación definida puntualmente.

Damos en primer lugar la definición formal y propiedades elementales de los grupos topológicos que nos permitan cómodamente hilvanar nuestros argumentos sobre $\mathbb{Z}$.

Definición 0.1 *Un grupo topológico es una terna $(G, *, \tau)$ dónde G designa un conjunto, $* : G \times G \to G$ una operación binaria que da a G estructura de grupo y τ una topología en G que hace continua la operación $*$ -considerando en $G \times G$ la topología producto-, así como la inversión $G \to G$ definida por $x \in G \mapsto x^{-1}$.*

De la propia definición surge el corolario de que las traslaciones a derecha e izquierda:

$$r_a, l_a : G \to G \text{ definidas por } r_a(x) = x * a \text{ y } l_a(x) = a * x$$

son homeomorfismos, para cada $a \in G$. En consecuencia los entornos de un punto cualquiern $a \in G$ están perfectamente determinados por los entornos del elemento neutro e, mediante la correspondiente traslación.

La topología τ de la definición 0.1 se dirá que es una topología de grupo para G, o también que la topología τ es compatible con la estructura de grupo de G. La estructura algebraica de grupo interacciona con la estructura topológica, y algunas propiedades topológicas son automáticas, mientras que otras se ven notablemente reforzadas. Por ejemplo, todo grupo topológico es un espacio topológico homogéneo, completamente regular (y por tanto uniformizable [13, (VII.7.22)]). Las proposiciones siguientes son también muestra de éllo.

Proposición 0.2 *Todo grupo topológico T_1 es también T_2 (es decir, Hausdorff).*

Proposición 0.3 *Todo grupo topológico I-numerable y Hausdorff es metrizable (Teorema de Birkhoff-Kakutani).*

En un conjunto cualquiera X pueden definirse topologías sencillas relacionadas con su álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$, cómo la topología discreta τ_d ó la cofinita τ_c. Si en el lugar del conjunto X tomamos un grupo algebraico $(G, *)$ cabe plantearse si dichas topologías son compatibles con la estructura de grupo.

Proposición 0.4 *Sea G un grupo infinito y sean τ_d y τ_c las topologías en G discreta y cofinita respectivamente. Entonces (G, τ_d) es un grupo topológico, mientras que (G, τ_c) no lo es.*

Demostración: La primera afirmación es evidente, mientras que la segunda es consecuencia de la Proposión 0.2, puesto que G dotado de τ_c es un espacio T_1, pero no es T_2. QED

En lo que sigue denominamos simplemente G a un grupo algebraico o topológico, la operación y -en su caso- la topología se sobreentienden, y en lugar de $x * y$ escribimos xy.

Basándonos en la Proposición 0.2, sólo nos van a interesar los grupos topológicos de Hausdorff, puesto que una mínima propiedad de separación (incluso T_0) en un grupo topológico ya implica que se cumple el axioma T_2. A partir de ahora los grupos considerados en este trabajo son **abelianos y Hausdorff**.

Sistema de entornos del elemento neutro $e \in G$.

Describimos las propiedades esenciales de una subfamilia $\mathcal{N}(e)$ de partes de G, para poder asegurar que constituyen un sistema de entornos del elemento neutro para una topología de grupo en G.

(G1) $e \in V, \forall V \in \mathcal{N}(e)$

(G2) $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(e)$, siempre que $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e)$

(G3) Si para $W \subset G$ existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{N}(e)$

(G4) $\forall W \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $VV := \{xy : x, y \in V\} \subset W$

(G5) $W \in \mathcal{N}(e) \Rightarrow W^{-1} := \{x^{-1} : x \in W\} \in \mathcal{N}(e)$

1 Topologías p-ádicas

Sea p un número primo. La familia

$$\mathcal{B} = \{p^n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$$

es base de entornos de 0 para una topología de grupo en $\mathbb{Z}$, que se denomina la topología p-ádica, y que denotaremos por λ_p. Fácilmente se comprueba que $\mathcal{B}$ cumple las propiedades $G1, G2, G4, G5$, y además los conjuntos de $\mathcal{B}$ son subgrupos de $\mathbb{Z}$. En general, una topología de grupo que admite una base de entornos de cero formada por subgrupos se denomina una *topología lineal*.

La simple observación de que el conjunto de los números primos $\mathbb{P}$ tiene cardinal $\aleph_0$ nos permite afirmar que las topologías p-ádicas constituyen una familia infinita de topologías en $\mathbb{Z}$. En efecto, si p, q son primos distintos $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ y $(\mathbb{Z}, \lambda_q)$ no son topológicamente isomorfos. Los únicos automorfismos de $\mathbb{Z}$ son la identidad y la inversión, que **no** transforman entornos de cero en λ_p en entornos de cero en λ_q.

Podemos pensar qué otras topologías lineales existen en $\mathbb{Z}$. Cómo los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$, para un entero m, las topologías lineales en $\mathbb{Z}$ se caracterizan fácilmente a través de las llamadas D-sucesiones, que juegan el mismo papel que la sucesión $p, p^2, \dots p^n, \dots$ en la topología p-ádica.

Definición 1.1 *Una sucesión $b_1, b_2, \dots$ de números naturales se dirá que es una D-sucesión si:*

- $b_1 = 1$.
- $b_n \neq b_{n+1}$ *para todo número natural n.*
- b_{n+1} *es múltiplo de b_n para todo número natural n.*

Una D-sucesión $\mathbf{b} = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ define una topología lineal en $\mathbb{Z}$, que denominaremos topología b-ádica λ_b, mediante la siguiente base de entornos de cero:

$$\mathcal{B} = \{b_n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$$

Todas las topologías lineales no discretas de Hausdorff en $\mathbb{Z}$ se definen mediante una D-sucesión (v. [2, (2,1)]) . Destacamos el siguiente hecho fácil de demostrar:

Proposición 1.2 *Sea $\mathbf{b} = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ una D-sucesión. En $(\mathbb{Z}, \lambda_b)$ la sucesión $\mathbf{b}$ converge a 0. En particular, $p^n \to 0$ en la topología p-ádica*

Teniendo en cuenta que un subgrupo abierto de un grupo topológico es también cerrado obtenemos la siguiente propiedad:

Proposición 1.3 *Un grupo lineal G es cero-dimensional y por tanto es totalmente inconexo. En particular $(\mathbb{Z}, \lambda_b)$ es cero dimensional, para cualquier D-sucesión $\mathbf{b}$.*

2 Topologías precompactas

Las topologías b-ádicas en $\mathbb{Z}$ descritas en la anterior sección son precompactas, en el siguiente sentido:

Definición 2.1 *Se dirá que un grupo topológico (G,τ) es precompacto si para todo V entorno de cero existe un subconjunto finito F tal que $G = F + V$, es decir G se obtiene como unión finita de trasladados de V.*

Es una consecuencia directa de la definición anterior que todo grupo compacto es también precompacto. Por el teorema de categoría de Baire, un grupo infinito compacto y T_2, o metrizable y completo no puede ser **numerable**. Por tanto el grupo $\mathbb{Z}$ no admite ninguna topología de Hausdorff compacta. Sin embargo veremos que admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas y T_2. Por otro lado, no puede haber una topología de grupo metrizable y completa en $\mathbb{Z}$. En la sección 4 daremos una amplia familia de topologías de grupo completas en $\mathbb{Z}$ (no metrizables).

Las topologías precompactas en un grupo abeliano G están relacionadas con el grupo de los caracteres $Hom(G,\mathbb{T})$. Destacamos la definición de grupo dual que usaremos en lo sucesivo.

Definición 2.2 *Sea (G,τ) un grupo topológico. El grupo dual de G que designaremos por $G^\wedge$ es el grupo de los caracteres continuos, es decir $G^\wedge \leq Hom(G,\mathbb{T})$. Si τ es la topología discreta $G^\wedge = Hom(G,\mathbb{T})$.*

Si G es el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$, cualquier homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{T}$ viene definido por la imagen de su generador 1, y su conjunto $Hom(\mathbb{Z},\mathbb{T})$, puede identificarse con $\mathbb{T}$. La correspondencia $\varphi \mapsto \varphi(1)$ es de hecho un isomorfismo entre los grupos $Hom(\mathbb{Z},\mathbb{T})$ y $\mathbb{T}$. Más aún, es un isomorfismo topológico si $Hom(\mathbb{Z},\mathbb{T})$ está dotado de la topología de la convergencia puntal y $\mathbb{T}$ tiene la topología euclídea ordinaria. Por tanto el dual de $\mathbb{Z}$ con cualquier topología de grupo es un subgrupo de $\mathbb{T}$.

Se demuestra fácilmente que el grupo dual de $(\mathbb{Z},\lambda_p)$ es precisamente el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$, formado por todas las raices p^n-simas de la unidad de $\mathbb{T}$, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

El siguiente resultado, consecuencia del teorema de Peter-Weyl permite entender que los grupos precompactos tienen la topología débil correspondiente a la familia de sus caracteres continuos.

Teorema 2.3 *[11, 22.14] Si (G, τ) es un grupo compacto y T_2, existen suficientes caracteres continuos para separar puntos de G. Esto es, para cada par $g_1, g_2 \in G$ con $g_1 \neq g_2$ existe $\varphi \in G^\wedge$ tal que $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$.*

Este teorema precisamente implica que todo grupo compacto y Hausdorff G se encaja en el producto $\mathbb{T}^{G^\wedge}$ mediante un isomorfismo topológico (no suprayectivo en general). Además la topología original de G es la débil correspondiente a su familia de caracteres continuos.

Es inmediato probar que un subgrupo de un grupo compacto es precompacto, y por otra parte un grupo precompacto se sumerge de forma estándar en su "completado" que es compacto. Por tanto, la clase formada por todos los grupos precompactos se pueden identificar a la clase formada por los subgrupos de los grupos compactos. Los siguientes teoremas, extraidos de [7, (1.2)], nos proporcionarán un método para construir todas las topologías precompactas de un grupo G y en particular de $\mathbb{Z}$:

Teorema 2.4 *Sea (G, τ) un grupo topológico y $G^\wedge$ su grupo dual. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) (G, τ) es precompacto.
b) La topología τ coincide con la topología débil en G correspondiente a la familia de homomorfismos $G^\wedge$.

Teorema 2.5 *Si G es un grupo abeliano, H un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ que separa puntos de G, y τ_H la topología débil en G correspondiente a la familia H, el grupo dual $(G, \tau_H)^\wedge$ es precisamente H.*

Proposición 2.6 *Si H es un subgrupo infinito de $\mathbb{T}$, entonces H separa puntos de $\mathbb{Z}$*

Demostración: En efecto, si m es entero no nulo, existe algún $\alpha \in H$ con $\alpha^m \neq 1$, ya que sólo hay m raíces m-simas de 1 y H es infinito.

QED

Ahora estamos en condiciones de construir todas las topologías precompactas de Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Por los Teoremas 2.4 y 2.5, se justifica el siguiente procedimiento. Sea H un subgrupo infinito del círculo unidad del plano complejo. Definimos la topología τ_H cómo la topología débil asociada a H; es decir, la que tiene como subbase de entornos de cero la familia $\mathcal{B} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{N}_0(\mathbb{T}) \text{ y } f \in H\}$. Se comprueba directamente que τ_H es una topología de grupo.

Dependiendo del subgrupo H que se tome, se pueden obtener diferentes propiedades de la topología τ_H. Por ejemplo:

- Si $H_1 < H_2$, entonces $\tau_{H_1} < \tau_{H_2}$.
- El conjunto de subgrupos de $\mathbb{T}$ y el conjunto de topologías precompactas en $\mathbb{Z}$ están en correspondencia biyectiva.
- El subgrupo H es numerable si y sólo si τ_H es metrizable.

Denotamos por $\mathfrak{P}$ al conjunto de topologías precompactas en $\mathbb{Z}$.

Proposición 2.7 *Existen $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas y Hausdorff en $\mathbb{Z}$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{B}$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$, tal que $1 \in \mathfrak{B}$. Designamos por $\alpha_b = e^{2\pi i b}$, con $b \in \mathfrak{B}$. Para cada $b \neq 1$, el grupo $\langle \alpha_b \rangle$ generado por α_b es un subgrupo infinito de $\mathbb{T}$ y por la proposición 2.6 separa puntos de $\mathbb{Z}$. Para cualquier $M \subseteq \mathfrak{B}$, el grupo H_M engendrado por $\{\alpha_m : m \in M\}$ da lugar a una topología precompacta y Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta que $card(\mathcal{P}(\mathfrak{B})) = 2^{\mathfrak{c}}$ y que si $M \neq M'$, las topologías τ_{H_M} y $\tau_{H_{M'}}$ son distintas, obtenemos que $card(\mathfrak{P}) \geq 2^{\mathfrak{c}}$. Por otra parte en $\mathbb{Z}$ no puede haber más de $2^{\mathfrak{c}}$ topologías.

QED

Observación 2.8 Aunque hemos dado una demostración directa de la Proposición 2.7, el resultado ya era conocido. De hecho en [16] se prueba que hay dos familias $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas en $\mathbb{Z}$ -no homeomorfas dos a dos-, tales que las topologías de $\mathcal{A}_1$ no tienen sucesiones convergentes no triviales, mientras que las de $\mathcal{A}_2$ si las tienen. Teniendo en cuenta que toda topología metrizable en cualquier conjunto infinito tiene sucesiones convergentes no triviales, las topologías de $\mathcal{A}_1$ no son metrizables.

La familia $\mathfrak{P}$ tiene como máximo la topología $\tau_{\mathbb{T}}$ o topología débil inducida por todos los caracteres de $\mathbb{Z}$. Siguiendo a Van Douwen en su magnífico trabajo [9], un grupo abeliano discreto dotado de la topología débil asociada a $Hom(G, \mathbb{T})$ se denota por $G^{\#}$. En dicho trabajo, se da una prueba de que para cualquier grupo abeliano infinito G, $G^{\#}$ no tiene sucesiones convergentes no triviales. En [3, lema 1], se da -con otros fines- una prueba directa de este hecho para $\mathbb{Z}^{\#}$.

El clásico Teorema de Pontryagin-Van Kampen sugiere que la topología natural en un grupo dual debe ser la compacto-abierta. La noción de reflexividad también se cimienta en dicho teorema: se dirá que un grupo topológico G es *reflexivo* si la evaluación canónica α_G de G en $G^{\wedge\wedge}$ es isomorfismo topológico, donde ambos $G^{\wedge}$ y $G^{\wedge\wedge}$ están dotados de la correspondiente topología compacto abierta. La clase de los grupos reflexivos abarca los localmente compactos y Hausdorff, precisamente ésta es la afirmación del famoso Teorema mencionado. Ya en los 50 del siglo pasado se obtuvieron otros grupos reflexivos no localmente compactos. Recientemente, Gabriyelyan ha encontrado una topología reflexiva no discreta en el grupo de los enteros, [10]. Esto es un hecho asombroso, sin embargo pensamos que la siguiente pregunta -por ser aún más exigente- tendrá una solución negativa:

Cuestión abierta 2.9 *(Tkachenko, 2009) ¿Existe alguna topología precompacta ν en $\mathbb{Z}$ tal que $(\mathbb{Z}, \nu)$ sea reflexivo?*

3 Topologías de convergencia uniforme

En [4] (página 24, ejercicio 2), Bourbaki afirma que las topologías no discretas en el grupo de los enteros son precompactas. Sin embargo, esta afirmación es errónea, como veremos al final de esta sección.

Vamos a definir mediante una pseudométrica en $\mathbb{Z}$ una topología de convergencia uniforme en un subconjunto $S \subseteq \mathbb{T}$.

Definición 3.1 *Fijamos un subconjunto $S \subset \mathbb{T}$. La aplicacion $d_S : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}_+$ definida de la siguiente manera: $d_S(m,n) = \sup_{\alpha \in S} |\alpha^m - \alpha^n|$ es una seudométrica en $\mathbb{Z}$ acotada por 2.*

Proposición 3.2 *La pseudométrica d_S define una topología de grupo en $\mathbb{Z}$ que denotaremos por ρ_S. Si S separa puntos de $\mathbb{Z}$, entonces d_S es una métrica.*

Demostración: Toda pseudométrica invariante por traslaciones da lugar a una topología de grupo [12] (tomando como entornos de cero las bolas $B_n = \{z \in \mathbb{Z} : d_S(z,0) < \frac{1}{n}\}$). Es claro que d_S es invariante por traslaciones ya que $d_S(m+k, n+k) = \sup |\alpha^{m+k} - \alpha^{n+k}| = \sup |\alpha^k||\alpha^m - \alpha^n| = \sup |\alpha^m - \alpha^n| = d_S(m,n)$.

QED

Observación 3.3 *La topología ρ_S, es la topología de convergencia uniforme en el conjunto S. Con notación aditiva para $\mathbb{T}$, es decir considerado $\mathbb{T}$ cómo el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se comprueba en [2] que los conjuntos $V_{S,n} := \{k \in \mathbb{Z} : kx + \mathbb{Z} \in [-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n}] + \mathbb{Z}$ para todo $x \in S\}$ con $n \in \mathbb{N}$ constituyen una base de entornos de 0 para ρ_S.*

Observación 3.4 *Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{T}$, entonces $\rho_A \leq \rho_B$.*

Proposición 3.5 *Si S es denso, entonces d_S da lugar a la topología discreta.*

Demostración: Vamos a ver que fijados $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $d_S(m,n) = d_{\mathbb{T}}(m,n)$. Para ello tomamos $\alpha \in \mathbb{T}$. Sea $\epsilon > 0$. Por ser S denso, existe $s \in S$ tal que $|s - \alpha| < \frac{\epsilon}{|m|+|n|}$. Ahora bien, $s^m - \alpha^m = (s-\alpha)(s^{m-1} + s^{m-2}\alpha + \cdots + \alpha^{m-1})$.

Tomando módulos, tenemos que $|s^m - \alpha^m| = |s-\alpha||s^{m-1} + s^{m-2}\alpha + \cdots + \alpha^{m-1}| < \frac{\epsilon|m|}{|m|+|n|}$.

Por otro lado $\alpha^m - \alpha^n = \alpha^m - s^m + s^m - s^n + s^n - \alpha^n$. Es decir, $|\alpha^m - \alpha^n| \leq |\alpha^m - s^m| + |s^m - s^n| + |s^n - \alpha^n| < \frac{\epsilon|m|}{|m|+|n|} + d_S(m,n) + \frac{\epsilon|n|}{|m|+|n|} = d_S(m,n) + \epsilon$. Tomando supremos tenemos que $d_S(m,n) \leq d_{\mathbb{T}}(m,n) < d_S(m,n) + \epsilon$. Al ser la desigualdad cierta para todo $\epsilon > 0$, se deduce que $d_A(m,n) = d_{\mathbb{T}}(m,n)$.

QED

La densidad de S **no** es necesaria para que la topología ρ_S sea discreta. Sin embargo, hay "muchos" subconjuntos $S \subseteq \mathbb{T}$ que dan lugar a topologías uniformes no discretas. En [2] se da una familia de sucesiones $S \subseteq \mathbb{T}$ que verifican:
1) $(\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge = \langle S \rangle$ y
2) la topología precompacta asociada a $\langle S \rangle$, $\tau_{\langle S \rangle}$ no coincide con ρ_S.

Claramente 1) implica que ρ_S no es discreta. Además, el dual de $(\mathbb{Z}, \tau_{\langle S \rangle})$ es $\langle S \rangle$ (por 2.5), y así los duales de $(\mathbb{Z}, \tau_{\langle S \rangle})$ y de $(\mathbb{Z}, \rho_S)$ coinciden. Teniendo en cuenta el Teorema 2.4, sólo puede haber una topología precompacta en el grupo $\mathbb{Z}$ entre todas aquéllas que dan lugar al mismo dual. Por 2) obtenemos que ρ_S no es precompacta.

Cada ρ_S definida con el criterio anterior, es una topología de grupo **no precompacta** en $\mathbb{Z}$, lo que contradice la afirmación de Bourbaki arriba mencionada.

La siguiente proposición se demuestra directamente:

Proposición 3.6 *Para $S \subseteq \mathbb{T}$ se obtiene $S \subseteq (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge$.*

Proposición 3.7 *La topología ρ_S no es precompacta para ningún subconjunto infinito $S \subseteq \mathbb{T}$.*

Demostración: Procedemos por reducción al absurdo. Por el teorema 2.4, tenemos que en el caso de que ρ_S fuera precompacta, en particular, sería la topología débil asociada al subgrupo $H = (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge \leq \mathbb{T}$; es decir, τ_H. Es claro que $\tau_H \leq \rho_S$. Ahora bien, supongamos que $\rho_S \leq \tau_H$; para cada entorno de 0 U_ρ de ρ_S, deberíamos tener otro entorno de 0 U_τ de τ_H de tal manera que $U_\tau \subseteq U_\rho$.

Los entornos de τ_H son de la forma $U_F := \{k \in \mathbb{Z} | \varphi(k) \in \mathbb{T}_+ \text{ para todo } \varphi \in F \text{ con } F \subseteq (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge \text{ finito}\}$. Por otra parte, $U_S := \{k \in \mathbb{Z} | \varphi(k) \in \mathbb{T}_+ \text{ para todo } \varphi \in S\}$ es un entorno de ρ_S. Supongamos que existe $F \subset H$ tal que $U_F \subseteq U_S$. Ahora consideramos $V_F := \{\varphi \in (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge | \varphi(x) \in \mathbb{T}_+ \text{ para todo } x \in U_F\}$ y análogamente, $V_S := \{\varphi \in (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge | \varphi(x) \in \mathbb{T}_+ \text{ para todo } x \in U_S\}$. Por las propias definiciones y la hipótesis de que $\rho_S = \tau_H$, tenemos que $V_S \subseteq V_F$ y además $S \subseteq V_S$. De acuerdo con [1, 7.11] V_F es finito, por lo cuál es imposible que $V_S \subseteq V_F$. Consecuentemente, $\rho_S \neq \tau_H$.
QED

Cuestión abierta 3.8

1. *Computar $(\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge$ para $S \subseteq \mathbb{T}$ cualquiera.*
2. *Dar condiciones necesarias y suficientes para que $\rho_S \neq \rho_R$ con $S, R \subseteq \mathbb{T}$.*
3. *Calcular la cardinalidad de la familia $\{\rho_S : S \subseteq \mathbb{T}\}$*

4 Topologías completas en $\mathbb{Z}$

Hasta ahora hemos mostrado ejemplos de topologías en $\mathbb{Z}$ -metrizables o no-, que en ningún caso son completas. En esta sección presentamos una familia de topologías completas no discretas, que debido al teorema de categoría de Baire no son metrizables (ni localmente compactas).

En [14] Protasov y Zelenyuk se cuestionan lo siguiente: dada una sucesión $a = (a_n)$ en un grupo G, ¿existe una topología de grupo en G que sea de Hausdorff y tal que la sucesion a sea convergente a cero en dicha topología? La respuesta depende de la sucesión. Por ejemplo la sucesion $(a_n) = (n^2) \subseteq \mathbb{Z}$ no converge a 0 para ninguna topología de grupo y Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Así surge la siguiente noción.

Definición 4.1 *Sea G un grupo y $a = (a_n) \subset G$, una sucesión. Diremos que a es una T- sucesión si existe una topología de grupo y de Hausdorff τ en G tal que $a_n \to 0_G$ en τ, siendo 0_G el elemento neutro de G.*

Mediante una sencilla aplicación del lema de Zorn se prueba que si $a \subset G$ es una T-sucesión, entonces existe una topología en G de grupo más fina entre todas aquéllas que hacen nula la sucesión $a = (a_n)$. Protasov y Zelenyuk usan el término *topología determinada por la sucesión* a para designarla y hacen una construcción de la misma que informalmente consiste en: definir primero unos subconjuntos de G que incluyen las colas de la sucesión $a = (a_n)$, y tomar después todas las sumas finitas de elementos de los subconjuntos anteriores. El proceso da lugar a una base de entornos del neutro para una topología de grupo en G que es la más fina entre todas las que hacen nula la sucesión a. Lo escribimos formalmente como sigue:

Definición 4.2 ([14]) *Sea G un grupo, sea $a = (a_n)$ una T-sucesión en G y $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de naturales. Definimos*

- $A_m^* := \{\pm a_n | n \geq m\} \cup \{0_G\}$.
- $A(k, m) := \{g_0 + \cdots + g_k | g_i \in A_m^* \, i \in \{0, \ldots, k\}\}$.
- $[n_1, \ldots, n_k] := \{g_1 + \cdots + g_k : g_i \in A_{n_i}^*, i = 1, \ldots, k\}$.
- $V_{(n_i)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_1, \ldots, n_k]$.

Proposición 4.3 *La familia* $\{V_{(n_i)} : (n_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ *es una base de entornos de* 0_G *para una topología de grupo* $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ *en* G*, que es la más fina de todas aquéllas en las que convege* a*. El símbolo* $G_{\{a_n\}}$ *designará al grupo* G *dotado de* $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$*.*

La topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ es necesariamente de Hausdorff, por la definición de T-sucesión. El siguiente teorema, cuya demostración no incluimos por ser muy técnica, es el resultado más importante de la sección:

Teorema 4.4 *[14, Theorem 8]*
Sea G *un grupo y sea* $a = (a_n)$ *una* T*-sucesión. Entonces la topología* $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ *es completa.*

Para una D-sucesión a en $\mathbb{Z}$ es claro que se puede construir la topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ en $\mathbb{Z}$, que de acuerdo con el teorema anterior, es completa y no metrizable. Las siguientes propiedades de $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ tienen especial interés: la primera porque resuelve un problema de Malykhin de varios años de antigüedad y la segunda nos permite obtener que el grupo dual es metrizable y k-espacio.

Observación 4.5 *(1)* $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ *es un grupo secuencial, pero no es Frechet-Urysohn (ver [14, Theorem 7 y Theorem 6]).*

(2) $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ *es un* k_ω*-grupo (ver [15, 4.1.5]).*

Proposición 4.6 *El grupo dual de* $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ *coincide algebráica y topológicamente con el dual de* $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$*; es decir, se identifica con* $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$ *dotado de la topología discreta.*

Demostración: En [8, 4.6] se obtiene que el dual de $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ coincide algebráicamente con el dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ y por tanto se identifica a $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$. La observación (2) de 4.5 implica que $\mathbb{Z}^\wedge_{\{p^n\}}$ es metrizable y completo. Por el Teorema de Categoría de Baire, teniendo en cuenta que $\mathbb{Z}^\wedge_{\{p^n\}}$ es numerable, obtenemos que es discreto y por tanto coincide también topológicamente con el dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$.

QED

La proposición 4.6 nos permite resolver negativamente un problema planteado en [8], que indicamos a continuación, aunque para ello tenemos que aludir a una clase de grupos topológicos abelianos que en particular contiene a la clase de los grupos reflexivos. Se trata de los grupos localmente cuasi-convexos, que constituyen una clase de grupos que de algún modo refleja y extiende las propiedades de los espacios vectoriales localmente convexos. De hecho todo espacio localmente convexo considerado como un grupo respecto de la adición (es decir, olvidando la estructura lineal), es un grupo localmente cuasi-convexo. Estudiar a fondo esta clase de grupos implicaría ampliar demasiado este trabajo, por tanto remitimos al lector interesado a [5] para formarse una idea clara y precisa de la misma. En [8] se prueba - mediante cálculo directo de algunas envolturas cuasi-convexas- que los grupos $\mathbb{Z}_{\{2^n\}}$ y $\mathbb{Z}_{\{3^n\}}$ no son localmente cuasi-convexos y se pregunta qué ocurre para $\mathcal{T}_{\{p^n\}}$ con $p > 5$. De modo directo hemos obtenido lo siguiente:

Proposición 4.7 *Sea p un primo cualquiera. El grupo $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ no es localmente cuasi-convexo y, por tanto, no es reflexivo.*

Demostración: Para abreviar, llamemos $G := \mathbb{Z}_{\{p^n\}}$. Si G fuera localmente cuasi-convexo, la aplicación canónica α_G sería inyectiva y abierta ([1, 6.10]). De nuevo por (2) de la observación 4.5, G es k-grupo, lo que implica que α_G es continua. Por tanto α_G es un encaje topológico de G en $G^{\wedge\wedge}$. Por la proposición 4.6, $G^{\wedge}$ es discreto y en consecuencia $G^{\wedge\wedge}$ es compacto. El mencionado encaje permite afirmar que G es precompacto. Ahora el Teorema 2.4 nos indica que sólo hay una topología precompacta en $\mathbb{Z}$ con dual $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$, concretamente la p-ádica λ_p. Así obtenemos la igualdad $G = (\mathbb{Z}, \lambda_p)$, que contradice el hecho de que $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ es metrizable pero $G = \mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ no lo es.

QED

Cuestión abierta 4.8 *(1) ¿ Bajo qué condiciones un par de D-sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dan lugar a grupos distintos $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ y $\mathbb{Z}_{\{b_n\}}$?.*

(2) *Estudiar si la modificación localmente cuasi-convexa de la topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ es de Mackey en el sentido definido en [6].*

Bibliografía

[1] L. Außenhofer, *Contributions to the duality theory of abelian topological groups and to the theory of nuclear groups*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 384, 1999.

[2] Außenhofer, L., de la Barrera, D., *Linear topologies on $\mathbb{Z}$ are not Mackey topologies*, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 216, Issue 6, 2012, 1340–1347.

[3] W. Banaszczyk and E. Martín-Peinador, *The Glicksberg Theorem on Weakly Compact Sets for Nuclear Groups*, Annals of the New York Academy of Sciences, General Topology and Applications, Vol. 788, no 1, (1996) 34–39.

[4] N. Bourbaki, *General topology I*, Herrmann, Paris, 1966.

[5] M. Bruguera, *Grupos topológicos y grupos de convergencia: estudio de la dualidad de Pontryagin*, Doctoral Dissertation. Barcelona, 1999.

[6] M. J. Chasco, E. Martín-Peinador and V. Tarieladze, *On Mackey Topology for groups*, Stud. Math. **132**, No.3, 257-284 (1999).

[7] Comfort, W. W.; Ross, K. A. *Topologies induced by groups of characters*, Fund. Math. 55 1964 283-291.

[8] Dikranjan, D., *Application of Graev's topology towards the construction of non-precompact compatible topologies*, preprint (Diciembre de 2010).

[9] E. K. van Douwen, *The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G-space, for abelian groups G*, Topology and Appl. 34 (1990) 69–91.

[10] Gabriyelyan, S. S., *Groups of quasi-invariance and the Pontryagin duality.* Topology Appl. 157 (2010), no. 18, 2786-2802.

[11] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 115, Academic Press, New York and Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[12] Klee, V. L. Jr., *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)* Proc. Amer. Math. Soc. 3, 1953 483-487.

[13] Margalef, J.; Outerelo, E.; Pinilla, J. *Topología* Alhambra 1979

[14] Protasov, I., Zelenyuk, E.,*Topologies on abelian groups* Math. USSR Izvestiya, Vol. 37 (1991), No. 2.

[15] Protasov, I., Zelenyuk, E.,*Topologies on groups determined by sequences* Mathematical Studies, Monograph Series Vol. 4, Lviv, 1999.

[16] Raczkowski, S. U. *Totally bounded topological group topologies on the integers.* Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999). Topology Appl. 121 (2002), no. 1-2, 63-74.

[17] M. Tkachenko, L. M. Villegas, C. Hernández, O. J. Rendón, *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana 1997.