Sistemas L de rayos y sumabilidad

A. PLANS y E. MARTÍN

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consta de dos partes. La primera corresponde a los espacios de Hilbert y la segunda se refiere a espacios de Banach.

Destacamos el resultado más importante de la primera parte:

Para todo operador lineal acotado A, no compacto, del espacio de Hilbert separable real ℓ_2, son equivalentes: a) A es inyectivo; b) existe una base ortonormal $(e_i)_{i\in N}$ cuya sucesión imagen $(Ae_i)_{i\in N}$ es una M-base, doblemente acotada, de $\overline{A(\ell_2)}$. Además $(Ae_i)_{i\in N}$ es heterogonal por bloques.

A este fin hemos definido el sistema L de rayos (SLR), y estudiamos más adelante una condición de sumabilidad que los caracteriza.

La segunda parte se dedica fundamentalmente al estudio de una generalización de los SLR a los ℓ_p, manteniendo la correspondiente condición de sumabilidad. Deducimos que tales sistemas existen en $\ell_p (p > 2)$ y no existen para $p < 2$.

NOTACIÓN Y OBSERVACIONES

Por operador entenderemos siempre un operador lineal acotado. Dado un operador $A\colon \ell_2 \to \ell_2$, A^* designa su adjunto. Para espacios de Banach $T'\colon B_2' \to B_1'$ designa el operador conjugado de $T\colon B_1 \to B_2$. $\mathcal{S}$ representa el ideal de los operadores compactos (en ℓ_2). El núcleo de un operador A lo designamos por $N(A)$, y el rango por $R(A)$. El número natural p' será el conjugado de p

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \, .$$

Contribuciones matemáticas. Libro-homenaje al prof. Botella Raduán. Ed. Univ. Complutense. Madrid, 1986

[ ] representa la envoltura lineal cerrada. Una sucesión $(a_i)_{i\in N}$ es doblemente acotada (d.a.) si

$$0 < \inf_i \|a_i\| \leqslant \sup_i \|a_i\| < \infty.$$

$(a_i)_{i\in N}$ es minimal (o topológicamente libre) si $a_i \notin [(a_j)_{j\neq i}]$. Por M-base o base de Markushevich se entiende una sucesión minimal completa verificando

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i,\ a_{i+1},\ \ldots] = o.$$

La base débil, definida por Dixmier en su tesis [2] es exactamente una M-base de ℓ_2. (,) designa el producto escalar en ℓ_2 y $\rightharpoonup$ la convergencia débil.

I.

DEFINICIÓN DE SISTEMA L

$(a_i)_{i\in N} \subset \ell_2$ es un sistema L cuando verifica la condición

$$\sum_1^{\infty} |(a_i,\ x)|^2 < \infty, \quad \forall x \in \ell_2$$

([17], pág. 155). Equivalentemente, la sucesión $(a_i)_{i\in N}$ es imagen de una base ortonormal (b.o.n.) de ℓ_2 por un cierto operador acotado.

DEFINICIÓN DE SISTEMA L DE RAYOS

Una sucesión de rayos (subespacios unidimensionales de ℓ_2) $(r_i)_{i\in N}$ es un sistema L de rayos (SLR) si existe $a_i \in r_i$ ($\forall i \in N$) tal que $(a_i)_{i\in N}$ es un sistema L doblemente acotado.

Ejemplo sencillo de un tal sistema lo constituye el *sistema heterogonal de rayos* $\{r_i \subset \ell_2 | \exists a_i \in r_i$ tal que $(a_i)_{i\in N}$ es heterogonal$\}$ [6]. En ℓ_2, «heterogonal» coincide con «incondicional».

Es inmediato probar que, dado un SLR $(r_i)_{i\in N}$, cualquier sucesión $(a_i)_{i\in N}$ d.a. con $a_i \in r_i$ sirve para definirlo como tal.

Un SLR $(r_i)_{i\in N}$ *no puede tener un rayo de acumulación débil.* Pues si una subsucesión

$$r_{p_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} r \Leftrightarrow \exists a_{p_i} \in r_{p_i},\ a \neq o,\ a \in r$$

tal que

$$a_{p_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} a,$$

y entonces, para todo r_j, $r_j \notin (r_{p_i})_{i\in N}$, situamos $a_j \in r_j$, $\|a_j\| = 1 \Rightarrow$ la sucesión así formada $(a_i)_{i\in N}$ es un sistema L y existe una b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ y un operador A tales que $a_i = Ae_i(\forall i \in N)$. Como

$$e_i \xrightarrow[i\to\infty]{} o,$$

en particular,

$$Ae_{p_i} = a_{p_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} o \wedge a_{p_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} a,$$

con $a \neq o$, lo cual es absurdo.

Por consiguiente, todo SLR $(r_i)_{i\in N}$ ha de carecer necesariamente de rayos de acumulación débil, hecho que expresaremos poniendo

$$r_i \xrightarrow[i\to\infty]{} o.$$

El recíproco no es cierto, como muestra un ejemplo que damos más adelante.

Notemos que para todo SLR $(r_i)_{i\in N}$, $\dim[(r_i)_{i\in N}] = \infty$, pues de lo contrario $(r_i)_{i\in N}$ sería débilmente relativamente compacto.

Es de destacar que, para todo SLR $(r_i)_{i\in N}$, toda sucesión vectorial d.a. $(a_i \in r_i)_{i\in N}$ es un *sistema* L *de un operador no compacto*.

Consideremos ahora un operador A y sus posibles SLR correspondientes. En [3], [13] se encuentra la siguiente caracterización de $A \in \mathcal{S}$:

$$Ae_i \xrightarrow[i\to\infty]{} o,$$

para toda b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$. Por consiguiente, los operadores compactos se pueden caracterizar por el hecho de no tener asociado ningún SLR.

Resultan fácilmente los siguientes casos, para un operador $A \notin \mathcal{S}$, con $N(A) = o$ (si $N(A) \neq o$, podemos referirnos a $N(A)^\perp$):

a) A tiene un inverso a la izquierda A^{-1} acotado.

Se caracteriza por ser d.a. *todos* sus correspondientes sistemas L. Equivalentemente, todos sus sistemas L subtienden SLR y son heterogonales.

b) A^{-1} no acotado.

De acuerdo con [9], [13], un operador no compacto se caracteriza por ser

$$\inf_i \|Ae_i\| > 0,$$

para alguna b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ de ℓ_2. Por tanto, hay sistemas L d.a. ($\Rightarrow$ SLR) y sistemas L en los que el ínfimo de la norma es cero. En el primer caso, los sistemas L no pueden ser heterogonales.

Por consiguiente, si el operador inyectivo A no es compacto, ni con inverso acotado, para mejorar sus sistemas L doblemente acotados hemos de fijar la atención en la posición relativa de los rayos correspondientes. A esta cuestión se refiere lo expuesto a continuación.

Lema

Sea un subespacio lineal E, no cerrado, denso en ℓ_2. Entonces un operador inyectivo A es *compacto* sí y sólo si, para toda b.o.n. $(e_i')_{i\in N} \subset E$ (tales b.o.n. existen), se verifica

$$\inf_i \|Ae_i'\| = 0. \tag{1}$$

Demostración

Si $A \in \mathcal{S}$, la condición (1) se cumple para toda b.o.n. de ℓ_2, en particular para toda b.o.n. contenida en E.

Supongamos ahora que se verifica la condición (1) para toda b.o.n. $(e_i')_{i\in N} \subset E$. Claramente $\|Ae_i'\| > 0$, $\forall i \in N$.

Sea $(e_i)_{i\in N}$ una b.o.n. de ℓ_2. Por ser $\overline{E} = \ell_2$, podemos encontrar $(c_i)_{i\in N} \subset E$, $\|c_i\| = 1$, $\forall i \in N$, con

$$\sum_1^\infty \|c_i - e_i\|^2 < \infty,$$

de modo que $(c_i)_{i\in N}$ sea un sistema L que represente un operador regular ($(c_i)_{i\in N}$ completo) de la forma $U + T$, con U unitario y $|||T||| < \infty$. Entonces [11], equivalentemente, se verifica:

i) $\theta_i = \alpha(c_i, [c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots]) > 0$,

ii) $\displaystyle\sum_1^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)^2 < \infty.$

En particular,

$$\theta_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha(c_i, [c_1, \ldots, c_{i-1}]) \xrightarrow[i\to\infty]{} \frac{\pi}{2} .$$

Sea $(e_i'')_{i\in N}$ la b.o.n. contenida en E, resultado de aplicar a $(c_i)_{i\in N}$ el proceso de ortonormalización de Schmidt. Resulta

$$\|c_i - e_i''\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \Rightarrow \|e_i - e_i''\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Por hipótesis

$$\inf_i \|Ae_i''\| = 0,$$

luego también

$$\inf_i \|Ae_i\| = 0,$$

como resulta de aplicar la continuidad de A y

$$\|e_i - e_i''\| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Al ser $(e_i)_{i\in N}$ una b.o.n. cualquiera de ℓ_2, teniendo en cuenta la observación hecha en b), A es compacto. □

Un operador A con $N(A) = o$, será no compacto sí y sólo si

$$\inf_i \|Ae_i'\| > 0,$$

para una cierta b.o.n. $(e_i')_{i\in N}$, contenida en un subespacio lineal dado, denso en ℓ_2.

Consideremos ahora un operador A, no compacto, inyectivo, con

$$R(A) \neq \overline{R(A)} = \ell_2.$$

Equivalentemente

$$A^* \notin \mathcal{S},\ N(A^*) = o,\ R(A^*) \neq \overline{R(A^*)} = \ell_2.$$

Sea $(e_i)_{i\in N}$ una b.o.n. de ℓ_2 y $a_i = Ae_i(\forall i \in N)$ el sistema L imagen. Apliquemos a $(a_i)_{i\in N}$ el método de ortonormalización de Schmidt:

$$Ae_i = a_i = \alpha_{1i}e'_1 + \ldots + \alpha_{ii}e'_i,\ \alpha_{ii} \neq 0(\forall i \in N)$$

$\Rightarrow (e'_i)_{i\in N} \subset R(A)$ es una b.o.n. de ℓ_2.

Sea U el operador unitario definido por $e'_i = Ue_i(\forall i \in N)$, luego $a_i = AU^*e'_i(\forall i \in N)$. Designemos por $A_1 = AU^*$, $(a_i = A_1e'_i)_{i\in N}$ le corresponde como sistema L. Referido ℓ_2 a la b.o.n. $(e'_i)_{i\in N}$, $(a_i)_{i\in N}$ viene representado analíticamente (y, por tanto, el operador A_1) por la matriz infinita $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots)$, donde $a_i(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ii}, 0, 0, \ldots)$; se trata de una matriz triangular, por encima de la diagonal principal $(\alpha_{ij} = 0, \forall i > j)$.

El operador $A_1^* = UA^*$ referido a la misma b.o.n. $(e'_i)_{i\in N}$, vendrá representado analíticamente por la matriz traspuesta $(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ii}, 0, 0, \ldots)$. La columna i-ésima, formada por las coordenadas de $a'_i = UA^*e'_i$, es:

$$0, 0, \ldots, 0, \alpha_{ii}, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{ij}, \ldots$$

$(\alpha_{ij} = 0, \forall j < i)$. La sucesión, sistema L de A_1^*, $(a'_i)_{i\in N}$ es completa, ya que $\overline{R(A^*)} = \ell_2$, y de acuerdo con su representación analítica (matriz triangular por debajo de la diagonal principal), tiene que ser una M-base de ℓ_2 [15].

De acuerdo con la representación polar, $A = VH$, $H \geqslant 0$, podemos referirnos, sin restricción de la generalidad, a operadores hermíticos. Podemos aplicar, pues, lo anterior a un operador hermítico H, $N(H) = o$, $R(H) \neq \overline{R(H)} = \ell_2$, con lo que $H_1^* = UH$, con U unitario. Por tanto, para toda b.o.n. $(e'_i)_{i\in N} \subset R(H)$, resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Schmidt a un sistema L $(a_i = He_i)_{i\in N}$, se verifica que $(UHe'_i)_{i\in N}$ es una M-base de $\ell_2 \Rightarrow (He'_i)_{i\in N}$ también es M-base de ℓ_2.

Proposición

Sea el operador $A = VH$, en su representación polar, con $N(A) = o$ y $\overline{R(A)} = \ell_2$, $R(A) \neq \overline{R(A)}$. Entonces, para toda b.o.n. $(e'_i)_{i\in N} \subset R(H)$, resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Schmidt a un sistema L del operador H, la sucesión imagen $(Ae'_i)_{i\in N}$ es una M-base de ℓ_2.

Hemos de mantener la hipótesis $N(A) = o$, es decir, el operador A inyectivo. En efecto, existe el resultado siguiente [14]:

«Para todo operador lineal acotado A: $\ell_2 \to \ell_2$, con $N(A) \neq o$, y todo sistema ortogonal completo de rayos $(r_i)_{i\in N}$ con $r_i \not\subset N(A)$, $\forall i \in N$, la sucesión de rayos imagen $(Ar_i)_{i\in N}$ *no* es minimal» (es decir, $\forall b_i \in Ar_i - \{o\}$, $(b_i)_{i\in N}$ no es minimal).

Por tanto, con $N(A) \neq o$, ningún sistema L de A puede ser minimal, y menos M-básico.

Dado un operador cualquiera A inyectivo, no compacto, con $R(A) \neq \overline{R(A)}$, es interesante, de acuerdo con la definición de SLR, estudiar la existencia de una b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ tal que la sucesión imagen $(Ae_i)_{i\in N}$ sea M-básica d.a. Seguidamente nos dedicamos a esta cuestión.

De acuerdo con [14], existe un sistema ortogonal completo de rayos $(r_i)_{i\in N}$ tal que $(Ar_i)_{i\in N}$ es heterogonal completo en $\overline{R(A)}$. Tomemos $(e_i \in r_i)_{i\in N}$, $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in N$. Entonces $(Ae_i \in Ar_i)_{i\in N}$ es heterogonal en dirección, con $\inf \|Ae_i\| = 0$. Denotemos con

$$u_i = \frac{1}{\|Ae_i\|} Ae_i.$$

Tenemos la factorización $A = CB$,

$$e_i \xrightarrow{B} \|Ae_i\|\, e_i \xrightarrow{C} \|Ae_i\|\, u_i. \qquad (i \in N)$$

C: $\ell_2 \to \overline{R(A)}$ tiene inverso acotado a la izquierda. Bastará considerar el operador hermítico B: $e_i \to \|Ae_i\|\, e_i (i \in N)$, donde $(e_i)_{i\in N}$ es una b.o.n. de ℓ_2, por construcción. Pongamos

$$\|Ae_i\| = \lambda_i (\forall i \in N),\ \inf_i \lambda_i = 0.$$

Como $A \notin \mathcal{S}$, existe una subsucesión $(\lambda_{p_i})_{i\in N} \subset (\lambda_i)_{i\in N}$, doblemente acotada; para la subsucesión complementaria $(\lambda_{q_i})_{i\in N}$ se verifica

$$\inf_i \lambda_{q_i} = 0.$$

Designemos por

$$\lambda' = \inf_i \lambda_{p_i} > 0,\ \lambda'' = \sup \lambda_{p_i} < \infty.$$

Fijemos μ', μ'' tales que:

$$0 < \mu' < \lambda' \leq \lambda'' < \mu'' < \infty.$$

Reordenemos $(e_i)_{i\in N}$ y tomemos primero el bloque

$$\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_{n_1}}; \lambda_{q_1}.$$

El subespacio

$$E_{n_1+1} = [e_{p_1}, \ldots, e_{p_{n_1}}, e_{q_1}]$$

es invariante por B, consideremos su restricción a él. Existe un sistema o.n. completo en E_{n_1+1},

$$e'_1, \ldots, e'_{n_1}, e'_{n_1+1}$$

tal que

$$\|Be'_1\| = \ldots = \|Be'_{n_1}\| = \|Be'_{n_1+1}\| = \xi_1 \quad [18]$$

$$\Rightarrow \xi_1^2 = \frac{\lambda_{p_1}^2 + \ldots + \lambda_{p_{n_1}}^2}{n_1 + 1} + \frac{\lambda_{q_1}^2}{n_1 + 1}.$$

Podemos tomar $n_1 \in N$ suficientemente grande para que se cumpla

$$\frac{\lambda_{q_1}^2}{n_1 + 1} < \mu''^2 - \lambda''^2, \quad \frac{n_1 \lambda'^2}{n_1 + 1} > \mu'^2,$$

y llegamos a la acotación

$$\mu'^2 < \xi_1^2 < \mu''^2.$$

Una vez fijado el primer bloque, de forma análoga fijamos el siguiente:

$$e_{p_{n_1+1}}, \ldots, e_{p_{n_2}}; e_{q_2},$$

obteniendo el sistema o.n.

$$e'_{n_1+2}, \ldots, e'_{n_2+2},$$

completo en

$$[e_{p_{n_1+1}}, \ldots, e_{p_{n_2}}; e_{q_2}],$$

verificando:

$$\|Be'_{n_1+2}\| = \ldots = \|Be'_{n_2+2}\| = \xi_2,$$

$$\mu'^2 < \xi_2^2 < \mu''^2.$$

El proceso así iniciado es indefinido, y el resultado es una b.o.n. $(e'_i)_{i\in N}$ tal que el sistema L correspondiente $(Ae'_i)_{i\in N}$ es doblemente acotado, completo en $\overline{R(A)}$ y heterogonal por bloques. En particular, es una M-base de $\overline{R(A)}$, doblemente acotada y regular [15], «strong M-base» [16].

No se puede mejorar este resultado manteniendo la hipótesis $R(A) \neq \overline{R(A)}$.

Pues el paso siguiente sería la existencia de una b.o.n. cuya sucesión imagen fuera ya *heterogonal;* esto equivaldría a la existencia de inverso acotado a la izquierda ($R(A) = \overline{R(A)}$).

Concluimos así con el siguiente

Teorema

Dado un operador A no compacto, son hechos equivalentes:

i) $N(A) = o$,

ii) Existe una b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ tal que el sistema L imagen $(Ae_i)_{i\in N}$ es una M-base fuerte doblemente acotada, de $\overline{R(A)}$.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii). Si $R(A) = \overline{R(A)}$, A tiene inverso acotado, y entonces $\forall (e_i)_{i\in N}$ b.o.n., $(Ae_i)_{i\in N}$ es una base heterogonal de $R(A) \Rightarrow (Ae_i)_{i\in N}$ es, en particular, una M-base fuerte doblemente acotada de $R(A)$.

Si $R(A) \neq \overline{R(A)}$, estamos en la situación considerada anteriormente, pudiendo afirmar la existencia de una b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ en las condiciones exigidas.

ii) $\Rightarrow$ i). En particular, $(Ae_i)_{i\in N}$ es minimal, por lo cual $N(A) = o$ [14]. □

Resumiendo: Sea A un operador inyectivo, no compacto. Entonces tenemos dos casos:

i) $R(A) = \overline{R(A)}$. A cada b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ le corresponde un SLR $([Ae_i])_{i\in N}$. Además dicho SLR es siempre heterogonal.

ii) $R(A) \neq \overline{R(A)}$. Existe una b.o.n. $(e_i)_{i\in N}$ tal que $([Ae_i])_{i\in N}$ es un SLR, y existe una b.o.n. $(e_i')_{i\in N}$ tal que $([Ae_i'])_{i\in N}$ no es SLR. Y $(e_i)_{i\in N}$ puede elegirse de modo que $(Ae_i)_{i\in N}$ sea una M-base fuerte, d.a., de $\overline{R(A)}$.

Consideremos ahora los sistemas L de rayos en relación con la sumabilidad.

Hacemos notar inicialmente que, dada una sucesión de rayos $(r_i)_{i\in N}$, son hechos equivalentes:

i) $(r_i)_{i\in N}$ es un SLR,

ii) Para $(a_i \in r_i - \{o\})_{i\in N}$ se verifica

$$\sum_1^\infty \|a_i\|^2 < \infty \Leftrightarrow (a_i)_{i\in N} \quad \text{sumable.}$$

En efecto, $(r_i)_{i\in N}$ SLR $\Leftrightarrow$ $(b_i \in r_i)_{i\in N}$ d.a. es un sistema L $\Leftrightarrow$ existe A: $e_i \mapsto b_i(\forall i \in N)$, donde $(e_i)_{i\in N}$ es una b.o.n. de ℓ_2. Admitamos

$$\sum_1^\infty \|\lambda_i b_i\|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_1^\infty |\lambda_i|^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_1^\infty \lambda_i b_i \in R(A) \Rightarrow (\lambda_i b_i)_{i\in N}$$

sumable. Y recíprocamente, es conocido [8] que $(\lambda_i b_i)_{i\in N}$ sumable $\Rightarrow$

$$\sum_1^\infty \|\lambda_i b_i\|^2 < \infty. \ \square$$

A continuación damos un ejemplo de sucesión de rayos $(r_i)_{i\in N}$, sin rayo de acumulación débil,

$$r_i \xrightarrow[i\to\infty]{} o,$$

que no es un SLR, y para la que existe $(a_i \in r_i - \{o\})_{i\in N}$ verificando

$$\sum_1^\infty \|a_i\|^2 < \infty,$$

sin ser sumable.

Sea una representación de ℓ_2 de la forma:

$$\ell_2 = \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_2 \underset{\perp}{\oplus} \dots \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_i \underset{\perp}{\oplus} \dots, \dim \mathcal{H}_i = \infty.$$

Situamos en $\mathcal{H}_i(\forall i \in N)$ un sistema heterogonal completo de rayos $(r_{in})_{n\in N}$ de modo que al tomar representantes $b_{in} \in r_{in}$, $\|b_{in}\| = 1$ para todo $n \in N$, resulta un sistema heterogonal completo en $\mathcal{H}_i(\forall i \in N)$, que corresponda a un operador lineal acotado A_i: $\mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_i$, de norma $\|A_i\| \to \infty$ [6]. Entonces, una vez ordenado el conjunto $(b_{in})_{i,n\in N}$ en forma de sucesión $(b_j)_{j\in N}$, *no* puede ser sistema L, dándose la condición

$$r_j = [b_j] \xrightarrow[j\to\infty]{} o.$$

Existirá $x_0 \in \ell_2$ tal que

$$\sum_1^\infty |(b_j, x_0)|^2 = \infty.$$

Por el teorema de Landau [17], tiene que existir una sucesión numérica $(\lambda_j > 0)_{j \in N}$, con

$$\sum_1^\infty \lambda_j^2 < \infty$$

tal que

$$\sum_1^\infty \lambda_j |(b_j, x_0)| = \infty.$$

Tomemos ahora $a_j \in r_j$ tal que

$$\|a_j\| = \lambda_j, \ \frac{a_j}{\|a_j\|} = b_j (\forall j \in N).$$

Resulta entonces

$$\sum_1^\infty \|a_j\| \left| \left(\frac{a_j}{\|a_j\|}, x_0 \right) \right| = \infty,$$

$$\sum_1^\infty |(a_j, x_0)| = \infty,$$

con lo cual $(a_j)_{j \in N}$ *no es sumable.*

Es de destacar el carácter geométrico intrínseco de la figura formada por un sistema L de rayos: una sucesión de rayos $(r_i)_{i \in N}$ es un SLR sí y sólo si, al tomar representantes $(a_i \in r_i)_{i \in N}$, $(a_i)_{i \in N}$ es sumable sí y sólo si $\Sigma \|a_i\|^2 < \infty$. Al considerar esto como nueva definición de SLR, prescindimos de hecho del operador que lo ha originado. Si tomamos representantes $(b_i \in r_i)_{i \in N}$ d.a. (por ejemplo, $\|b_i\| = 1$, $i \in N$), tendremos un tipo de sucesiones en ℓ_2, que incluye las heterogonales como caso particular.

Las sucesiones de rayos que carecen de subsucesiones SLR son precisamente las sucesiones débilmente relativamente compactas. Entre [12] y [7] se obtiene el resultado siguiente, que las caracteriza:

«Una sucesión de rayos $(r_i)_{i \in N}$ es relativamente débilmente compacta sí y sólo si, para $(a_i \in r_i - \{o\})_{i \in N}$ es equivalente:

i) $(a_i)_{i \in N}$ sumable,

ii) $\sum_1^\infty \|a_i\| < \infty$».

En [12] se encuentra el resultado siguiente:

«Un operador A: $\ell_2 \to \ell_2$ es de Hilbert-Schmidt sí y sólo si existe un sistema heterogonal completo de rayos $(r_i)_{i \in N}$ cuya imagen $(Ar_i)_{i \in N}$ es débilmente relativamente compacta».

Por tanto, en el caso $(r_i)_{i \in N}$ débilmente relativamente compacto, al tomar representantes $a_i \in r_i (\forall i \in N)$ formando un sistema L, la sucesión $(a_i)_{i \in N}$ *solamente* puede serlo de un operador de Hilbert-Schmidt.

II

Pasamos ahora a los espacios ℓ_p. Puede darse una generalización del sistema L de rayos en ℓ_p $(p > 2)$, de forma que se mantenga la equivalencia i) $\Leftrightarrow$ ii) de pág. 211.

A tal efecto recordamos que una sucesión $(x_n)_{n \in N}$ de un espacio de Banach cualquiera B, es débilmente p-sumable si $\forall f \in B'$,

$$\sum_1^\infty |fx_n|^p < \infty.$$

Es un hecho conocido [1] que si $p = 1$, una tal sucesión es imagen de la base canónica de c_0 por un operador lineal acotado definido en c_0.

Para $p > 1$, una sucesión $(x_n)_{n \in N}$ es débilmente p-sumable sí y sólo si es imagen de la base canónica de $\ell_{p'}$ por un operador lineal acotado definido en $\ell_{p'}$ [4].

Por estas razones estimamos que las sucesiones débilmente p-sumables en un espacio de Banach son las que mejor reflejan las propiedades de los sistemas L del espacio de Hilbert.

Proposición

En un espacio de Banach cualquiera, B, $(x_n)_{n \in N} \subset B$ es débilmente p-sumable sí y sólo si $\forall (\xi_i) \in \ell_{p'}$,

$$\sum_1^\infty \xi_i x_i$$

converge incondicionalmente.

Demostración

Por la observación precedente, si $(x_n)_{n\in N}$ es débilmente p-sumable, existe un operador lineal $S\colon \ell_{p'} \to B$ tal que $Se_i = x_i$, $\forall i \in N$ ($(e_n)_{n\in N}$ designa la base canónica de $\ell_{p'}$). Por la convergencia incondicional de

$$\sum_1^\infty |\xi_i|^{p'}$$

$\forall(\xi_i) \in \ell_{p'}$ y ser conmutativa la p-sumabilidad débil,

$$\sum_1^\infty \xi_i x_i$$

es incondicionalmente convergente.

Recíprocamente, supuesta la condición, para $(\xi_i) \in \ell_{p'}$, en particular $(\xi_i x_i)_{i\in N}$ es débilmente sumable, y $\forall f \in B'$,

$$\sum_1^\infty |f(\xi_i x_i)| = \sum_1^\infty |\xi_i|\, |fx_i| < \infty.$$

Por el teorema de Landau generalizado [5], p. 120, $\Rightarrow$

$$\sum_1^\infty |fx_i|^p < \infty. \ \square$$

En un espacio de Banach cualquiera, aunque $(x_n)_{n\in N}$ sea doblemente acotada en norma y débilmente p-sumable, no se tiene la implicación contraria:

$$\sum_1^\infty \xi_i x_i \quad \text{incondicionalmente convergente} \ \Rightarrow (\xi_i) \in \ell_{p'}. \tag{2}$$

Basta pensar en c_0 y tomar la sucesión $x_n = e_n$, $\forall n \in N$.

Proposición

Una condición suficiente para que una sucesión débilmente p-sumable $(x_n)_{n\in N} \subset B$ verifique (2), es que el operador $T\colon B' \to \ell_p$ tal que $f \mapsto (fx_n)_{n\in N}$ sea suprayectivo.

Demostración

Sea

$$\sum_1^\infty \xi_n x_n$$

incondicionalmente convergente; existe entonces un operador lineal acotado S: $c_0 \to B$, $e_n \mapsto \xi_n x_n$. Si T es suprayectivo, obtenemos una factorización del conjugado S':

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "T"'] & \ell_1 \\ \ell_p \arrow[ur, "D = (\xi_n)_{n\in N}"'] & \end{tikzcd}$$

y ahora $\forall z \in \ell_p$, $z = (gx_n)_{n\in N}$ para alguna forma lineal $g \in B'$ y

$$(\xi_n g x_n)_{n\in N} \in \ell_1 \Rightarrow \sum_1^\infty |\xi_n|\,|gx_n| < \infty.$$

De nuevo por el teorema de Landau,

$$\sum_1^\infty |\xi_n|^{p'} < \infty. \ \square$$

Notemos que aquí ℓ_p es un cociente de B'.

Proposición

Si $p > 2$, para una sucesión $(x_n)_{n\in N}$ contenida en ℓ_p doblemente acotada, son afirmaciones equivalentes:

i) $(x_n)_{n\in N}$ es débilmente p-sumable,

ii) $\sum_1^\infty \xi_n x_n$ converge incondicionalmente $\Leftrightarrow \sum_1^\infty |\xi_n|^{p'} < \infty$.

Resulta la implicación hacia la derecha de ii) por un resultado de Mazur [8]. Así, puede considerarse que éstas son las sucesiones que dan lugar a SLR generalizados. La base canónica de ℓ_p proporciona un ejemplo de sucesión en las anteriores condiciones.

No existen sucesiones doblemente acotadas débilmente p-sumables en ℓ_p para $p < 2$. Una sucesión débilmente p-sumable $(x_n)_{n\in N}$ sería la imagen de la base canónica de $\ell_{p'}$ por un operador acotado. Sin embargo, por ser $p' < p$, todo operador de $\ell_{p'}$ en ℓ_p es compacto, y así $(x_n)_{n\in N}$ no puede ser d.a.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, existen sistemas L de rayos en ℓ_p para todo $p \geqslant 2$ que generalizan los de ℓ_2.

Observemos que los casos $p = p'$ y $p < p'$ se diferencian en lo siguiente: Si $p \neq p'$, no existen sucesiones débilmente p-sumables en ℓ_p con

$$\inf \sum_1^\infty |fx_n|^p > 0, f \in \ell_{p'}, \|f\| = 1.$$

Dicha condición llevaría consigo que el operador $T\colon \ell_{p'} \to \ell_p$ tuviera un inverso continuo a la izquierda, y obtendríamos un subespacio de ℓ_p isomorfo a uno de $\ell_{p'}$, lo cual es imposible.

Es decir, en ℓ_p $(p \neq 2)$ toda sucesión $(x_n)_{n\in N}$ débilmente p-sumable verifica:

$$\inf \sum_1^\infty |fx_n|^p = 0, f \in \ell_{p'}, \|f\| = 1.$$

En el otro caso, $p = p' = 2$, existen sucesiones débilmente 2-sumables, con

a) $\inf \sum_1^\infty |(x_n, z)|^2 > 0, \|z\| = 1.$

El operador A^* $(A\colon e_n \to x_n, \forall n \in N, (e_n)_{n\in N}$ b.o.n. de $\ell_2)$, tiene inverso acotado.

$(x_n)_{n\in N}$ es completo, pues de lo contrario, el ínfimo anterior sería $= 0$.

b) $\inf \sum_1^\infty |(x_n, z)|^2 = 0, \|z\| = 1.$

A^* tiene inverso no acotado si $(x_n)_{n\in N}$ es completo.
A^* carece de inverso si $(x_n)_{n\in N}$ no es completo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BESSAGA, C. y PELCZYNSKI, A.: *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*. Studia Math., V. XVII, págs. 151-163 (1958).

[2] DIXMIER, J.: *Étude sur les variétés et les opérateurs de Julia, avec quelques applications*. Bull. Soc. Mat. France, V. 77, págs. 11-101 (1949).

[3] FILLMORE, P. A. y WILLIAMS, J. P.: *On operator ranges*. Advances in Mathematics, V. 7, págs. 254-281 (1971).

[4] GROTHENDIECK, A.: *Sur certain classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky Rogers*. Bol. da Sociedade de Mat. de São Paulo, V. 8 (1953).

[5] HARDY, G. H., LITTLEWOOD, J. E. y PÓLYA, G.: *Inequalities*. Cambridge University Press (1978).

[6] LORCH, E. R.: *Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., V. 45, págs. 564-569 (1939).

[7] MARTIN, E.: *Hilbert Schmidt operators in relation to summability*. Ins. de Mat. e Estatistica de São Paulo, págs. 51-55 (1982).

[8] MAZUR, S.: *Une remarque sur l'homeomorphie des champs fonctionnels*. Studia Math., V. 1, págs. 83-85 (1930).

[9] PELCZYNSKI, A.: *A characterization of Hilbert-Schmidt operators*. Studia Mat., V. 38, págs. 355-360 (1967).

[10] PLANS, A.: *Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonal-systeme*. Archiv der Mathematik, V. 10, págs. 304-306 (1959).

[11] PLANS, A.: *Sobre un determinante infinito definido mediante un operador de doble norma finita*. Actas IV R.A.M.E., págs. 123-129, Salamanca (1965).

[12] PLANS, A.: *Transformación de sistemas heterogonales completos de rayos mediante operadores de Hilbert-Schmidt y nucleares*. Actas Jornadas Matemáticas Franco-Españolas, Toulouse (1975).

[13] PLANS, A.: *Una caracterización de los operadores completamente continuos mediante sistemas ortonormales*. Actas IV Jornadas Luso-Españolas, págs. 359-363 (1977).

[14] PLANS, A.: *Imagen de un sistema ortogonal completo de rayos por un operador lineal acotado*. Coll. Math., V. XXVIII, fasc. 3, págs. 177-183 (1977).

[15] REYES, A.: *Aspectos reticulares y geométricos de sistemas de vectores en espacios de Banach y de Hilbert. Problema de la intersección*. Tesis doctoral. Fac. de Ciencias de Zaragoza (1980).

[16] SINGER, I.: *Bases in Banach Spaces*, II. Springer Verlag (1981).

[17] JULIA, G.:*Introduction Mathématique aux Théories Quantiques*. Gauthier-Villars (1955).

[18] RODÉS, A.: *Equal-normed images of orthonormal systems by bounded linear operators*. (En prensa).