Sobre algunos espacios de funciones continuas en el círculo unidad

Elena Cillero y Elena Martín–Peinador

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
Madrid, España
ecillero@mat.ucm.es
peinador@mat.ucm.es

A Enrique Outerelo, con admiración y afecto.

ABSTRACT

Consideramos la topología usual y la topología de Bohr en el grupo aditivo de los racionales, y estudiamos los correspondientes grupos de funciones continuas en el círculo unidad del plano complejo, dotados de la topología compacto–abierta. Hemos obtenido la reflexividad en sentido Pontryagin de los grupos mencionados, así como algunas propiedades topológicas.

2000 Mathematics Subject Classification: 22A10, 22D35.
Key words: Grupo topológico libre abeliano, números racionales, dualidad de Pontryagin, topología de Bohr.

Introducción

Dentro del álgebra topológica, término acuñado por Arkhangelskii, destaca como un gran capítulo el estudio de los espacios de funciones reales continuas definidas en un espacio topológico X. En efecto, las distintas estructuras algebraicas en los espacios $C(X)$ inducidas por las correspondientes de $\mathbb{R}$, en conjunción con diversas topologías, han dado lugar a un elenco de potentes resultados matemáticos. Baste mencionar el teorema de Stone–Weierstrass.

Si se considera $C(X)$ como espacio vectorial y se le dota de la topología de la convergencia puntual ó de la topología compacto–abierta se obtiene un espacio vectorial topológico localmente convexo, y como tal cabe estudiar la reflexividad. Ciertamente si X es compacto se añade un plus importante de estructura: $C(X)$ con la topología de la convergencia uniforme en los compactos es entonces un espacio de Banach. Observemos que recientemente Hernández y Uspenskij [9] han analizado la reflexividad en sentido Pontryagin de los grupos de la forma $C(X)$, dotados de la topología de la convergencia puntual.

La importancia de los espacios $C(X)$, así como la del grupo topológico multiplicativo de los complejos de módulo 1, $\mathbb{T}$, nos lleva a plantearnos el estudio de los grupos de la forma $C(X,\mathbb{T})$, donde X es un espacio topológico, y la operación del grupo está dada por la multiplicación puntual de funciones continuas, es decir la inducida por la operación de $\mathbb{T}$. Primordialmente consideraremos la topología compacto–abierta por su especial relevancia en la teoría de dualidad de grupos topológicos. De ahora en adelante designamos por $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ el grupo $C(X,\mathbb{T})$ dotado de la topología compacto–abierta, τ_{co}.

En la tesis de Außenhofer se estudia la reflexividad de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ en el sentido de Pontryagin. Allí se obtiene que si X es un k-espacio hemicompacto, $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ es reflexivo [2, Th 14.9]. Este es un resultado profundo, pues aunque se conocía un resultado análogo para $\mathcal{C}(X)$, las técnicas de trabajo en espacios vectoriales topológicos no son trasladables sin más a grupos topológicos. Considérese, por ejemplo, el papel preponderante que juegan los conjuntos convexos en todo el Análisis Funcional, y que el concepto de convexidad no es asequible en grupos topológicos. El camino seguido para la obtención del resultado mencionado es estudiar en primer lugar la reflexividad de $\mathcal{C}(K,\mathbb{T})$ para un espacio compacto K. Después se da un teorema de estructura de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$, donde X es un k-espacio completamente regular; esencialmente, se describe $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ como límite del sistema inverso formado por la familia de espacios $\mathcal{C}(K,\mathbb{T})$ cuando K recorre los compactos de X. La reflexividad de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ se obtiene apoyándose en la reflexividad de los correspondientes grupos de funciones $\mathcal{C}(K,\mathbb{T})$, y el teorema de estructura citado.

Surgen las preguntas naturales:

1) ¿Hay otros espacios X para los que $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ sea reflexivo?. Caracterizar la clase de los mismos.

2) Obtener teoremas de la forma: $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ es reflexivo si y solo si $\mathcal{C}(X)$ es reflexivo en sentido Pontryagin, i.e. considerado como grupo topológico.

3) Si G es un grupo topológico y $\widetilde{G}$ una cubierta universal de G dar condiciones en X que nos permitan afirmar la equivalencia entre la reflexividad de $\mathcal{C}(X,G)$ y de $\mathcal{C}(X,\widetilde{G})$.

Este trabajo constituye un pequeño paso en la dirección de estos objetivos, ya que hemos estudiado algunos ejemplos desde este punto de vista. Tomando como espacio X el grupo de los números racionales con su topología usual y con la topología de Bohr asociada a ésta, hemos probado que son reflexivos en sentido Pontryagin los correspondientes grupos $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$; que el primero constituye la complección del segundo, así como algunas otras propiedades topológicas de ambos. Hemos procurado dar demostraciones directas siempre que nos ha sido posible.

1. El grupo topológico $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$

Notación Como es habitual, los símbolos $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{T}$ designan los conjuntos de los números reales, racionales o complejos de módulo 1 respectivamente, y también designan —se entenderá por el contexto— los correspondientes espacios topológicos, dotados de la topología euclídea, o inducida por ésta. Si $K \subset X$ es compacto y $V \subset \mathbb{T}$ un abierto, se designará —siguiendo a Arens— por $(K, V) := \{f \in C(X, \mathbb{T}) : f(K) \subset V\}$. Los conjuntos (K, V), cuando K recorre los compactos de X y V los abiertos de $\mathbb{T}$ constituyen una subbase de la topología compacto–abierta de $C(X, \mathbb{T})$. Usaremos la notación $(K, V)_X$ solamente si fuera necesario distinguir el espacio X, dominio de las funciones.

Comenzamos estudiando algunas propiedades topológicas de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$. La operación en $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ es multiplicación puntual, i.e. $(f, g) \to fg : q \mapsto f(q)g(q)$ para $q \in \mathbb{Q}$; el elemento neutro es la función constantemente 1, que llamaremos f_1. Se demuestra fácilmente que los conjuntos de la forma (K, V_n), donde $K \subset \mathbb{Q}$ es un compacto cualquiera y $V_n = \{e^{2\pi i t} : |t| < \frac{1}{n}\}$, forman una base de entornos de f_1.

Teorema 1.1 $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ *no verifica el I-axioma de numerabilidad.*

Demostración. Probaremos que f_1 no posee una base numerable de entornos. Observemos primero que si $(K_1, V_{n_1}) \subset (K_2, V_{n_2})$, entonces $V_{n_1} \subset V_{n_2}$ y $K_2 \subset K_1$. El primer contenido es trivial. Supongamos que existe $x_0 \in K_2 \setminus K_1$. Como K_1 es cerrado, $\delta := d(x_0, K_1) > 0$, donde d designa la distancia asociada al valor absoluto. Sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tales que $y_1 < x_0 < y_2$ y $d(x_0, y_i) < \frac{\delta}{2}$, para $i = 1, 2$.
Definimos $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{T}$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < y_1 \text{ o } x > y_2 \\ z_0 \notin V_{n_2} & \text{si } y_1 < x < y_2 \end{cases}$$

Hemos construido una función continua que se hace 1 en K_1 pero tal que $g(x_0) \notin V_{n_2}$, y esto contradice nuestra hipótesis, luego $K_2 \subset K_1$.

Supongamos ahora que existe $\mathcal{B} = \{(K_m, V_n) : n, m \in \mathbb{N}\}$, base numerable de entornos de $f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$. Vamos a obtener una contradicción probando que en ese caso $\mathbb{Q}$ sería hemicompacto. En efecto, dado un compacto $K \subset \mathbb{Q}$, consideramos el entorno de f_1 dado por (K, V_n). Deben existir $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $(K_{m_0}, V_{n_0}) \subset (K, V_n)$, y por el párrafo anterior, $K \subset K_{m_0}$. Tenemos por tanto una familia numerable de compactos, que es cofinal en la familia de todos los compactos de $\mathbb{Q}$, respecto de la relación de "contenido" . Además $\mathbb{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$, ya que el mismo razonamiento se aplica a los compactos unipuntuales.

Como cualquier espacio metrizable hemicompacto ha de ser localmente compacto ([12, XIII.3.14]), $\mathbb{Q}$ no puede ser hemicompacto. Esta contradición prueba que $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ no es I-axioma. □

Corolario 1.2 *$\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ no es metrizable.*

Proposición 1.3 *Los subconjuntos compactos de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ son metrizables.*

Demostración. Basta tener en cuenta que el espacio $C(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ admite una topología metrizable, menos fina que la compacto–abierta. En efecto, designemos por $C_p(X, \mathbb{T})$ al conjunto $C(X, \mathbb{T})$ dotado de la topología de la convergencia puntual τ_p. Como $C_p(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ es subespacio topológico del espacio producto $\mathbb{T}^{\mathbb{Q}}$, que es metrizable, se obtiene fácilmente la afirmación. □

Cuestión. ¿Es $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ un espacio de Fréchet–Urysohn?. Obsérvese que en la proposición anterior se puede sustituir los subconjuntos compactos de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ por los subconjuntos relativamente numerablemente compactos. Sin embargo, no sabemos si la clausura de un subconjunto cualquiera puede determinarse por convergencia de sucesiones.

Definimos la aplicación restricción

$$\begin{array}{rcl} r : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T}) \\ f & \mapsto & f_{|\mathbb{Q}} \end{array}$$

Claramente r es un homomorfismo continuo. Por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, r es inyectiva. Sin embargo, r no es sobreyectiva:

En efecto, la aplicación $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{T}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mid x \mid < \sqrt{2} \\ -1 & \text{si } \mid x \mid > \sqrt{2} \end{cases}$$

es una aplicación continua de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ que no se puede extender continuamente a $\mathbb{R}$. La imagen de r contiene a los homomorfismos continuos y en general a las funciones uniformemente continuas.

Proposición 1.4 *La aplicación $r : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T}) \to \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ no es encaje topológico, es decir, r no es abierta en la imagen.*

Demostración. Vamos a probar que el entorno del neutro de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})$ dado por (K, V_m), donde $K = [-1, 1]$, se transforma mediante r en un conjunto que no es entorno de f_1 en $r(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T}))$.

Sea F un subconjunto compacto arbitrario de $\mathbb{Q}$. Se verifica que $(K \cap \mathbb{Q}) \setminus F \neq \emptyset$; de lo contrario, $K \cap \mathbb{Q} \subset F$ y, como $K \cap \mathbb{Q}$ es cerrado en $\mathbb{Q}$, $K \cap \mathbb{Q}$ sería un compacto de $\mathbb{Q}$. Esto nos lleva a un absurdo, ya que $K \cap \mathbb{Q}$ sería también compacto en $\mathbb{R}$, y por tanto cerrado.

Veamos ahora que $(F, V_n) \cap r(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})) \not\subseteq r((K, V_m))$. A tal efecto describimos la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$:

(i) Si $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, tomamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{m} < t_0 < \frac{1}{n}$, y definimos $f(x) := e^{2\pi i t_0}$, para todo x de $\mathbb{R}$. Se cumple que $r(f) \in (F, V_n)$, pero $f \notin (K, V_m)$.

(ii) Supongamos ahora $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$. Teniendo en cuenta lo demostrado en el párrafo anterior, $(K \cap \mathbb{Q}) \setminus F \neq \emptyset$ para el compacto $F \subset \mathbb{Q}$. Fijamos $x_0 \in (K \cap \mathbb{Q}) \setminus F$ y elegimos ε tal que $0 < \varepsilon < d(x_0, F)$. Obviamente, $(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \cap F = \emptyset$. Definimos una función continua $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{2}{\varepsilon m}(x - x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) & \text{si } x_0 - \frac{\varepsilon}{2} \leq x \leq x_0 \\ \frac{-2}{\varepsilon m}(x - x_0 - \frac{\varepsilon}{2}) & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } x_0 + \frac{\varepsilon}{2} < x \end{cases}$$

Sea $f = e^{2\pi i \tilde{f}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})$. Se tiene que $f \notin (K, V_m)$ y sin embargo $r(f) \in (F, V_n)$.

Como los conjuntos de la forma (F, V_n), con $F \subset \mathbb{Q}$ compacto, y $n \in \mathbb{N}$ constituyen una base de entornos de f_1 en $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$, tenemos que r no es abierta en la imagen. $\square$

Damos a continuación un lema que nos permitirá obtener que la imagen de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})$ por la aplicación restricción es densa en $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$.

Lemma 1.1 *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$, y $f : K \to \mathbb{T}$ una aplicación continua. Existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ continua tal que $\tilde{f}(h) = f(h)$ para todo $h \in K$.*

Demostración. Por ser K numerable, la función f no puede ser suprayectiva. Sea $p \in \mathbb{T} \setminus f(K)$, y $\rho : \mathbb{T} \setminus \{p\} \to (0, 1)$ un homeomorfismo. Si consideramos K como subconjunto de $\mathbb{R}$, la función ρf se extiende por el teorema de Tietze a todo $\mathbb{R}$. Si $g : \mathbb{R} \to (0, 1)$ designa una extensión continua de ρf, claramente puede definirse $\tilde{f}$ como $\rho^{-1} g$ compuesta con la inclusión de $\mathbb{T} \setminus \{p\}$ en $\mathbb{T}$. $\square$

Proposición 1.5 *Las funciones continuas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ que admiten una extensión continua a $\mathbb{R}$ constituyen un subgrupo denso de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$.*

Demostración. Sea K un compacto de $\mathbb{Q}$, V un abierto de $\mathbb{T}$ y (K, V) un abierto subbásico de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$. La prueba deriva del siguiente hecho: Para $f \in (K, V)$ podemos determinar $h \in (K, V)_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})$ tal que $r(h) = h_{|\mathbb{Q}} \in r(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})) \cap (K, V)$. En efecto, para $f_{|K}$, por el lema anterior, existe una aplicación continua $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})$ tal que $h_{|K} = f_{|K}$.

Consideremos ahora un abierto básico no vacío, $U := (K_1, V_1) \cap \cdots \cap (K_n, V_n)$. Para cualquier $f \in U$, tomando $K := K_1 \cup \cdots \cup K_n$ nos fijamos en $f_{|K}$, y razonando como en el párrafo anterior, llegamos a que $U \cap r(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{T})) \neq \emptyset$. $\square$

Observación 1.6 Si en vez de considerar todas las aplicaciones continuas en la Proposición 1.4 nos referimos únicamente a los homomorfismos continuos, $\mathcal{C}Hom(X,\mathbb{T})$, se obtiene el resultado sorprendente de que $r : \mathcal{C}Hom(\mathbb{R},\mathbb{T}) \to \mathcal{C}Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ es isomorfismo topológico. La suprayectividad de r se sigue de que todo homomorfismo continuo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ es uniformemente continuo. El hecho de que r es abierta puede verse en [2] y [5], donde se obtiene la validez de la afirmación en un contexto más general.

Proposición 1.7 *El grupo $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ contiene un subgrupo cerrado topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual. En particular, $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ contiene subgrupos uniparamétricos.*

Demostración. En [10, 23.27] puede verse que $\mathcal{C}Hom(\mathbb{R},\mathbb{T})$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}$ con la topología usual. Por tanto, teniendo en cuenta la Observación 1.6, $\mathbb{R}_u \cong \mathcal{C}Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ constituye un subgrupo uniparamétrico de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$. Por tratarse de un subgrupo localmente compacto, $\mathcal{C}Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ es cerrado en $\mathcal{C}Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$. $\square$

Cuestión ¿Es $r(\mathcal{C}Hom(\mathbb{R},\mathbb{T}))$ un subgrupo determinado de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$?. Dicho de otro modo, ¿es la aplicación dual de r un isomorfismo topológico?.

2. Otros ejemplos

Las Proposiciones 2.1 y 2.2 permiten sustituir $\mathbb{Q}$ por un espacio completamente regular y T_1 (i.e. de Tychonoff) en algunos de los resultados obtenidos en la sección anterior.

Proposición 2.1 *Si un espacio topológico X es completamente regular, X tiene la topología débil correspondiente a sus funciones continuas $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$.*

Demostración. Recordemos que X tiene la topología débil correspondiente a sus funciones continuas $\mathcal{C}(X,I)$, donde $I=[0,1]$. Basta por tanto componer cada función de X en I con la función $\rho : I \to \mathbb{T}$ definida por $\rho(t)=\exp\{i\pi t\}$. $\square$

Proposición 2.2 *Sea X un espacio completamente regular y T_1, $K \subset X$ compacto y $f : K \to \mathbb{T}$ continua, no suprayectiva. La aplicación f se extiende a una aplicación continua $\tilde{f} : X \to \mathbb{T}$.*

La demostración se puede hacer de forma análoga a la del Lema 1.1, identificando previamente el compacto K con su imagen en la compactación de Stone–Čech de X, para poder usar el teorema de Tietze. Obsérvese que no imponemos ninguna condición de conexión en el espacio X.

Proposición 2.3 *Sea X un espacio completamente regular y T_1. Entonces $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ es I-numerable si y solo si X es hemicompacto.*

La afirmación directa se prueba siguiendo el argumento del Teorema 1.1 y apoyándose en la Proposición 2.2 para construir la función g allí mencionada. La recíproca era ya conocida, [1, Teorema 7].

El siguiente corolario es consecuencia de que $\mathbb{R}$ es hemicompacto y de que todo grupo topológico I-numerable es metrizable:

Corolario 2.4 $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T})$ *es metrizable.*

Observación 2.5 Teniendo en cuenta que un grupo topológico que contiene un subgrupo metrizable denso, es necesariamente metrizable, obtenemos otra prueba de que $r : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}) \to \mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ no es abierta en la imagen. En efecto, siendo r un homomorfismo inyectivo, $r(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}))$ es un subgrupo de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ algebraicamente isomorfo a $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T})$. Por otra parte r es continua, pero no puede ser un encaje topológico, pues en ese caso $r(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}))$ sería subgrupo topológico de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ metrizable y denso (por 2.4 y 1.5 respectivamente), y llegaríamos a una contradicción con la Proposición 1.2. Luego r no es abierta en la imagen.

Proposición 2.6 *Si X es un espacio metrizable que no es localmente compacto, entonces $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ no es I-numerable y por tanto no es metrizable.*

Demostración. En efecto, si $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ fuera I-numerable, por la proposición anterior X sería hemicompacto, pero un espacio metrizable hemicompacto es necesariamente localmente compacto. □

Proposición 2.7 *Sea X un espacio metrizable localmente compacto. El grupo $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ es metrizable si y solo si X es σ-compacto.*

Para su demostración basta tener en cuenta que un espacio localmente compacto es hemicompacto si y solo si es σ-compacto, y aplicar la Proposición 2.3.

Proposición 2.8 *El grupo $\mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$ tiene las siguientes propiedades:*

a) No es metrizable.

b) La aplicación restricción $r : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$ no es abierta.

c) Contiene densamente al conjunto $r(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}))$.

Demostración. La demostración de a) se sigue de la Proposición 2.6.

Para demostrar b) no se puede argumentar como en la Proposición 1.5, ya que los compactos de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ no son en general numerables; esto se deduce fácilmente del hecho de que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En [2, Corolario 13.6, p.64] se prueba que una aplicación continua de un espacio compacto totalmente inconexo en $\mathbb{T}$ puede elevarse a aplicación continua en $\mathbb{R}$, lo que podremos usar para nuestros fines.

Sea ahora un abierto básico no vacío, $U := (K_1, V_1)\cap\cdots\cap(K_n, V_n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\mathbb{T})$, y sea $f \in U$. Consideremos $K := K_1\cup\cdots\cup K_n$. Como $K \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ es totalmente inconexo y compacto, por el resultado mencionado en el párrafo anterior, existe $\tilde{f} : K \to \mathbb{R}$ continua tal que $e^{2\pi i\tilde{f}} = f_{|K}$. Por otra parte K es un compacto de $\mathbb{R}$, luego cerrado, y por el teorema de Tietze existe $\tilde{g} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\tilde{g}_{|K} = \tilde{f}$. Para $g := e^{2\pi i\tilde{g}} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T})$ se tiene que $r(g)(K) = g(K) = e^{2\pi i\tilde{g}}(K) = e^{2\pi i\tilde{f}}(K) = f(K)$. Por tanto, $r(g) \in U$, lo que prueba que $r(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{T}))$ es denso en $\mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$.

Por último, las consideraciones hechas en la Observación 2.5 prueban que r no es abierta en la imagen. $\square$

3. La topología de Bohr en $\mathbb{Q}$

Vamos a considerar ahora una nueva topología en $\mathbb{Q}$, que de hecho puede definirse en cualquier grupo topológico abeliano G. Como es sabido los homomorfismos de G en $\mathbb{T}$ se denominan caracteres, y el grupo formado por los caracteres continuos de G dotado de la topología compacto–abierta se denomina grupo dual de G, y se denota por $G^\wedge$. En la Observación 1.6 mencionamos que $\mathbb{Q}^\wedge$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^\wedge$, que a su vez puede identificarse a $\mathbb{R}$ dotado de la topología usual. En particular, podemos pensar que cada número real r da lugar a un carácter continuo $\xi_r : \mathbb{Q} \to \mathbb{T}$ definido por $\xi_r(t) = e^{2\pi irt}$, y todos los caracteres continuos de $\mathbb{Q}$ vienen dados de esa forma.

La *topología de Bohr* de $\mathbb{Q}$ es precisamente la topología débil inducida por la familia $\{\xi_r : r \in \mathbb{R}\}$. Designaremos por $\mathbb{Q}_b$ a $\mathbb{Q}$ dotado de su topología de Bohr, τ_b. Observemos que el símbolo $\mathbb{Q}$ hasta ahora ha sido usado en dos sentidos, como conjunto soporte y como espacio topológico. En adelante designaremos por $\mathbb{Q}_u$ a $\mathbb{Q}$ dotado de la topología usual, cuando nos parezca que es oportuna la distinción.

Se demuestra directamente que $\mathbb{Q}_b$ es grupo topológico, y es precompacto ya que puede encajarse topológicamente en el grupo compacto $\mathbb{T}^{\mathbb{R}}$. Como $\mathbb{Q}$ dotado de su topología usual τ no es precompacto, podemos afirmar que $\tau_b < \tau$ estrictamente. Estudiamos a continuación algunas propiedades de $\mathbb{Q}_b$, cuya demostración se obtiene teniendo en cuenta que $\mathbb{Q}$ es numerable, y $\mathbb{Q}_b$ completamente regular y T_2.

Proposición 3.1 *El grupo topológico $\mathbb{Q}_b$ es paracompacto (luego normal), y σ-compacto. No es espacio de Baire.*

Proposición 3.2 *Un subconjunto de $\mathbb{Q}$ es compacto en la topología de Bohr si y solo si es compacto en la topología usual. En consecuencia, el grupo $\mathbb{Q}_b$ no es compacto, ni hemicompacto.*

Demostración. La primera afirmación es cierta para todo grupo nuclear [4]. Este es un resultado profundo que generaliza un teorema de Glicksberg —de idéntico contenido— para grupos localmente compactos abelianos. Por otra parte $\mathbb{Q}$ es un grupo nuclear, (ya que es subgrupo de un grupo localmente compacto, [3]) y esto finaliza la prueba. □

Advertimos al lector que la definición de grupo nuclear es sumamente complicada, y que cualquier resultado obtenido para la clase de los grupos nucleares es de una gran fuerza y estabilidad. En [3] se introducen y estudian dichos grupos.

Corolario 3.3 *El grupo $\mathbb{Q}_b$ no es k-espacio. Por tanto no es metrizable, ni localmente compacto.*

Demostración. Basta tener en cuenta que $\mathbb{Q}_u$ es k-espacio, y que solo puede haber una topología de k-espacio entre todas las que admiten la misma familia de compactos. □

Por la definición de la topología de Bohr, se comprueba directamente que los grupos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_b$ admiten los mismos caracteres continuos. Sin embargo $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T}) \neq \mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ ya que las funciones continuas de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_b$ en $\mathbb{T}$ determinan las topologías τ y τ_b respectivamente, (Proposición 2.1). En cualquier caso, observando que los entornos de cero en τ_b no son acotados en $\mathbb{Q}$ (en el sentido tradicional), la función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{T}$ definida por $f(q) = \exp\{\pi i \chi_C(q)\}$, donde χ_C denota la función característica del conjunto $C = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, es un ejemplo de función continua respecto de la topología usual y no continua respecto de la topología de Bohr.

Proposición 3.4 *$\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ es un subgrupo topológico de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.*

Demostración. Toda función continua de $\mathbb{Q}_b$ en $\mathbb{T}$ es también continua considerada de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ ya que $\tau_b < \tau$. Como los compactos en τ_b y en τ coinciden, se tiene que $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ es subgrupo topológico. □

Proposición 3.5 *El grupo topológico $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ es completo y es la complección de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$.*

Por ser $\mathbb{Q}$ un k-espacio, y $\mathbb{T}$ métrico completo, $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ es completo [12, XIII.2.33 b)]. Por otra parte la complección de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ viene dada por todas aquellas funciones de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ que restringidas a los compactos de τ_b sean continuas. Dichas funciones son exactamente las de $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$, teniendo en cuenta la Proposición 3.2.

Corolario 3.6 *El grupo topológico $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ no es metrizable.*

4. Reflexividad

Un grupo topológico abeliano G se dice que es *reflexivo* (o reflexivo en sentido de Pontryagin) si la aplicación canónica de G en su bidual $G^{\wedge\wedge}$, que llamaremos α, es isomorfismo topológico. El famoso teorema de dualidad de Pontryagin afirma que los grupos localmente compactos abelianos son reflexivos. En [13] se estudia la reflexividad de algunos grupos topológicos libres abelianos sobre espacios de Tychonoff X. Dichos grupos —damos más abajo su definición— están muy relacionados con los espacios de funciones $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$, y de hecho aplicando los resultados de [13], que también han sido objeto de estudio en [2] y en [8] independientemente, obtendremos fácilmente que $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$ son reflexivos.

Los grupos topológicos libres abelianos, definidos por Markov en 1945, han sido muy estudiados en la escuela rusa de topología general de los últimos tiempos, liderada por Arhangelskii. Como su nombre indica, recuerdan —de hecho generalizan— a la clase notable dentro del Algebra de los grupos libres abelianos.

Dado un espacio de Tychonoff X, el *grupo topológico libre abeliano sobre* X es una terna $(A(X),\sigma,\tau)$ tal que $(A(X),\sigma)$ es el grupo abeliano libre (algebraico) sobre el conjunto X, y τ es una topología de grupo de Hausdorff en $A(X)$, tal que:

- $\sigma : X \to A(X)$ es un encaje topológico con imagen cerrada.
- Para todo grupo topológico abeliano G y toda aplicación continua $\phi : X \to G$ existe un único homomorfismo continuo $\Phi : A(X) \to G$ tal que $\Phi\sigma = \phi$.

La prueba de la existencia del grupo topológico libre abeliano sobre un espacio de Tychonoff X puede verse en [10, 8.8], o [2, 12.1]. De la definición se deduce la unicidad (a menos de isomorfismos). Es práctica habitual llamar simplemente $A(X)$ al grupo topológico libre abeliano sobre X, y se sobreentienden los otros dos elementos de la terna.

Un grupo topológico libre abeliano se puede considerar como subgrupo cerrado de un espacio localmente convexo. En efecto, Markov también definió el espacio localmente convexo libre sobre un espacio de Tychonoff X, $L(X)$ (de modo categórico, similar a como se define el grupo topológico libre abeliano $A(X)$). La aplicación identidad en X, 1_X, da lugar a un homomorfismo continuo de $A(X)$ en $L(X)$, que —como probó Tkachenko— es además un encaje topológico, con imagen cerrada. En nuestro trabajo solo nos interesa destacar que algunas propiedades de $A(X)$ pueden derivarse de su condición de subgrupo de un espacio localmente convexo, como expresamos a continuación.

Proposición 4.1 *El grupo topológico libre abeliano sobre un espacio de Tychonoff X, $A(X)$, es localmente cuasi-convexo. Por tanto la aplicación canónica $\alpha : A(X) \to A(X)^{\wedge\wedge}$ es un monomorfismo y es abierta en su imagen.*

Demostración. Remitimos al lector a [3, 14.3], donde además podrá encontrar la definición precisa y propiedades de los grupos localmente cuasi-convexos. □

Estudiamos ahora la relación que existe entre los grupos $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ y $A(X)^\wedge$. Es claro que para un carácter continuo $\varphi : A(X) \to \mathbb{T}$, la composición $\varphi\sigma$ define un elemento de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$. Recíprocamente, toda función continua $f : X \to \mathbb{T}$ se "extiende" a un homomorfismo continuo $F : A(X) \to \mathbb{T}$, tal que $F\sigma = f$. Por la unicidad de F se obtiene que la correspondencia $\varphi \mapsto \varphi\sigma$ es una biyección de $A(X)^\wedge \to \mathcal{C}(X,\mathbb{T})$, que vamos a llamar R, y fácilmente se demuestra que es un isomorfismo continuo. Un argumento delicado (véase [2, 15.1]) (que en particular requiere conocer que los compactos de $A(X)$ tienen conjunto soporte acotado en X, usar la compactación de Stone–Čech de X y un teorema de Arhangelskii) prueba que si el espacio X es Nachbin–Shirota, entonces R es abierta, y por tanto isomorfismo topológico. Recordemos que un espacio completamente regular X es Nachbin–Shirota, o μ-espacio si cumple la siguiente condición: *Un subconjunto cerrado $S \subset X$ es compacto si y solo si toda función real continua definida en X, es acotada en S.* Observemos que el "sólo si" es lo que establece una condición, puesto que si S es compacto, $f(S) \subset \mathbb{R}$ es acotado para toda función $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Para futuras citas, sintetizamos lo expuesto en la siguiente proposición.

Proposición 4.2 *Si X es un espacio de Nachbin–Shirota, la aplicación $R : A(X)^\wedge \to \mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ definida por $\varphi \mapsto \varphi\sigma$, para $\varphi \in A(X)$, es isomorfismo topológico. En consecuencia, la aplicación dual $R^\wedge : \mathcal{C}(X,\mathbb{T})^\wedge \to A(X)^{\wedge\wedge}$ es también isomorfismo topológico.*

Proposición 4.3 *Si X es un espacio de Tychonoff cualquiera, $R^\wedge : \mathcal{C}(X,\mathbb{T})^\wedge \to A(X)^{\wedge\wedge}$ es homomorfismo continuo e inyectivo. Además $R^\wedge$ transforma isomórficamente el subgrupo H engendrado por las evaluaciones puntuales $\delta_x : \mathcal{C}(X,\mathbb{T}) \to \mathbb{T}$, con $x \in X$, en el subgrupo $\alpha(A(X))$.*

Demostración. La primera afirmación se sigue del hecho de que R es en particular continuo y suprayectivo.

Sea ξ un elemento de H. Por la definición de homomorfismo dual, $R^\wedge(\xi) : \chi \mapsto \xi(R(\chi)) = \xi(\chi\sigma)$.

En particular ξ es producto de evaluaciones; supongamos que para $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ se tiene $\xi(f) = \Pi f(x_i)^{n_i}$ con $i \in \{1,\dots r\}$, $x_i \in X$ y $n_i \in \mathbb{Z}$. Entonces: $\xi(\chi\sigma) = \Pi\chi\sigma(x_i)^{n_i} = \alpha_{A(X)}(\Sigma n_i\sigma(x_i))$ y recíprocamente, todo elemento de la imagen $\alpha(A(X))$ describe un elemento de H. □

Corolario 4.4 *Si $A(X)$ es reflexivo, los caracteres de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ solo pueden ser productos finitos de evaluaciones puntuales.*

Demostración. En efecto, $R^\wedge : \mathcal{C}(X,\mathbb{T})^\wedge \to A(X)^{\wedge\wedge} \cong \alpha(A(X))$ es homomorfismo inyectivo. □

Proposición 4.5 *Si un espacio X es Nachbin–Shirota y los caracteres de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ son productos finitos de evaluaciones puntuales, entonces $A(X)^{\wedge\wedge} = \alpha(A(X))$. Si además X es k-espacio, $A(X)$ es reflexivo.*

Demostración. Las Proposiciones 4.2 y 4.3 dan lugar a la primera afirmación, que a su vez prueba la suprayectividad de α. La Proposición 4.1 prueba que α es abierta e inyectiva. Por último, si X es k-espacio, se obtiene —directamente de la definición de grupo topológico libre abeliano— que $A(X)$ es k-grupo en el sentido de Noble, y en consecuencia α es continua, [11]. Luego $A(X)$ es reflexivo.

□

Proposición 4.6 *Si un espacio de Tychonoff X no contiene subconjuntos conexos compactos distintos de los unipuntuales, los caracteres de $\mathcal{C}(X,\mathbb{T})$ son productos de evaluaciones puntuales.*

Demostración. Esto es [2, 14.7]. □

Teorema 4.7 *Los grupos $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$ son reflexivos.*

Demostración. Los espacios $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son Nachbin–Shirota por ser paracompactos [2, 1.13], y por la Proposición 4.2, $\mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ y $\mathcal{C}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\mathbb{T})$ son topológicamente isomorfos a $A(\mathbb{Q})^\wedge$ y $A(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\wedge$ respectivamente.

Por otra parte, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son totalmente inconexos y k-espacios. Aplicando las Proposiciones 4.6, 4.5 y 4.3, se obtiene que $A(\mathbb{Q})$ y $A(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ son reflexivos. Asimismo son reflexivos sus duales $A(\mathbb{Q})^\wedge$ y $A(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\wedge$.

□

Teorema 4.8 *El grupo $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ es reflexivo.*

Demostración. El espacio $\mathbb{Q}_b$ es paracompacto (Proposición 3.1), y por el mismo argumento del teorema anterior, es Nachbin–Shirota y tenemos el isomorfismo $A(\mathbb{Q}_b)^\wedge \cong \mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$. Además, $\mathbb{Q}_b$ -siendo numerable y completamente regular- es totalmente inconexo. Mediante las Proposiciones 4.6, 4.3 y 4.2, obtenemos que el homomorfismo $R^\wedge : \mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})^\wedge \to A(\mathbb{Q}_b)^{\wedge\wedge} \cong \alpha(A(\mathbb{Q}_b))$ es 1-1 continuo y sobre.

Vamos a probar ahora que la aplicación canónica de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ en $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})^{\wedge\wedge}$ es continua, y para ello veremos que los compactos del dual de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ son equicontinuos. Si $K \subset \mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})^\wedge$ es compacto, también lo es su imagen $R^\wedge(K)$ en $\alpha(A(\mathbb{Q}_b))$. Identificamos este último con un compacto de $A(\mathbb{Q}_b)$, digamos L. Sabemos que en general los compactos de $A(X)$ tienen soporte funcionalmente acotado en X. Luego por ser $\mathbb{Q}_b$ Nachbin–Shirota, $\overline{\mathrm{sop}\, L} \subset \mathbb{Q}_b$ es compacto. Se comprueba directamente que es equicontinuo en $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$, al considerar $\mathbb{Q}$ sumergido en el dual de $\mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$. Bajo este punto de vista K es un subconjunto de $\overline{\text{sop } L}$, y por tanto también es equicontinuo.

$\square$

Observación 4.9 Los grupos $G_1 = \mathcal{C}(\mathbb{Q},\mathbb{T})$ y $G_2 = \mathcal{C}(\mathbb{Q}_b,\mathbb{T})$ admiten los mismos caracteres continuos por la Proposición 3.5. Pero $G_1^\wedge$ no es topológicamente isomorfo a $G_2^\wedge$ ya que G_1 y G_2 son reflexivos en sentido Pontryagin, y G_1 es un subgrupo propio de G_2.

Referencias

[1] R.F. Arens: *A topology for spaces of transformations.* Annals of Math. **47** (1946), no.3, 47–95.

[2] L. Aussenhofer: *Contributions to the duality theory of abelian topological groups and to the theory of nuclear groups.* Dissertationes Math. CCCLXXXIV, Warszawa, 1999.

[3] W. Banaszczyk: *Additive subgroups of topological vector spaces.* Lecture Notes Math. **1466,** Springer-Verlag, Berlin 1991.

[4] W. Banaszczyk, E. Martín–Peinador: *The Glicksberg theorem on weakly compact sets for nuclear groups.* Ann. New York Acad. Sciences **788** (1996), 34–39.

[5] M.J. Chasco: *Pontryagin duality for metrizable groups.* Arch. Math. **70** (1998), 22–28.

[6] E. Cillero: *Caracteres del grupo aditivo de los racionales.* Rev. Real Acad. Ciencias de Zaragoza **58** (2003), 115–128.

[7] R. Engelking: *General topology.* Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[8] S. Hernández, J. Galindo: *Pontryagin–van Kampen reflexivity for free abelian topological groups.* Forum Math. **11** (1999), 399–415.

[9] S. Hernández, V. Uspenskij: *Pontryagin duality for spaces of continuous functions.* J. Math. Anal. Appl. **242** (2000), no.2, 135–144.

[10] E. Hewitt, K.A. Ross: *Abstract harmonic analysis I.* Grund. Math. Wissens. **115,** Spinger, 1963.

[11] N. Noble: *k-Groups and duality.* Transactions AMS **151** (1970), 551–561.

[12] J. Margalef–Roig, E. Outerelo, J.L. Pinilla: *Topología, V.* Ed. Alhambra S.A., Madrid 1982.

[13] V.G. Pestov: *Free abelian topological groups and the Pontryagin–van Kampen duality.* Bull. Austral. Math. Soc. **52** (1995), 297–311.

[14] M. Tkachenko: *On completeness of free abelian topological groups.* Soviet Math. Dokl. **27** (1983), 341–345.

[15] S. Warner: *The topology of compact convergence on continuous function spaces.* Duke Math J. **25** (1958), 265–282.