[1]

CONSTRUCCION DE LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA DEBIL EN EL ESPACIO DE HILBERT

por

ELENA MARTIN PEINADOR

PUBLICADO EN LA «REVISTA MATEMÁTICA HISPANO - AMERICANA»,
4.ª SERIE - TOMO XXXIV - NÚMS. 4-5)

MADRID
TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO
J. GARCÍA MORATO, 122.—TELÉF. 233 06 19
1974

CONSTRUCCION DE LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA DEBIL EN EL ESPACIO DE HILBERT

por

ELENA MARTIN PEINADOR

Consideremos en H, espacio de Hilbert separable real, la topología definida por la convergencia débil τ_c; en ella el conjunto C es cerrado si y sólo si para $\forall \{\mathbf{x}_n\} \subset C \ni \mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} \in C$.

1. Proposición 1.—*Los conjuntos definidos por:*

$$B = E^{(o)} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)}),$$

donde $E^{(p_i)} \subset L^{(p_i)}$, *subespacio de codimensión* p_i *designa la bola, de centro* $\mathbf{o}$, *de radio* r_i, $r_{i-1} < r_i, r_i \to \infty$ *y* $E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)})$ *el* ε_i*-entorno de dicha bola, son base de entornos del origen en la topología* τ_c.

Demostración.—Designamos por $\mathcal{B}$ la familia de tales conjuntos. τ_c *está determinada* por la convergencia débil. Luego los τ_c-entornos del origen $\mathbf{o}$ estarán precisamente caracterizados por contener casi toda sucesión

$$\{\mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{o}\}.$$

Hemos de demostrar: 1) los conjuntos $B \in \mathcal{B}$ son τ_c-entornos de $\mathbf{o}$; 2) para $\forall$ A, τ_c-entorno de $\mathbf{o}$, $\exists\, B \in \mathcal{B} \ni B \subset A$.

1) Para ello hemos de ver que casi toda sucesión $\{\mathbf{x}_n \mid \mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{o}\}$ está contenida en B. Consideramos primero el caso en que $\{\mathbf{x}_n\}$ está doblemente acotada, es decir, $\nexists\, \mathbf{x}_{p_n} \to \mathbf{o}$.

Puesto que

$$r_n \to \infty, \exists\, r_{i_0} \ni \|\mathbf{x}_n\| < r_{i_0} \wedge \alpha(\mathbf{x}_n, H \ominus L^{(i_0)}) \underset{n\to\infty}{\to} \pi/2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \alpha(\mathbf{x}_n, L^{(i_0)}) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \exists\, \nu \ni \forall\, n > \nu, \mathbf{x}_n \in E_{\varepsilon_{i_0}}(E^{(i_0)}) \subset B.$$

Supongamos ahora que $\{\mathbf{x}_n\}$ no es doblemente acotada. Si existiera

$$\{\mathbf{x}_{p_n}\} \subset \{\mathbf{x}_n\} \wedge \{\mathbf{x}_{p_n}\} \not\subset B,$$

habríamos de aceptar que

$$\exists\, \{\mathbf{x}_{q_n}\} \subset \{\mathbf{x}_{p_n}\} \ni \|\mathbf{x}_{q_n}\| \to 0.$$

Hemos llegado a un absurdo, pues B contiene la esfera $E^{(0)}$ centro $\mathbf{o}$.

2) Dado A, τ_c-entorno de $\mathbf{o}$, vamos a construir un $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$. En particular: $\mathbf{x}_n \to \mathbf{o} \Longrightarrow \mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{o}$ y por tanto es inmediato que $\exists\, E^{(0)}$, bola de centro $\mathbf{o}$ y radio r_0, $E^{(0)} \subset A$.

Vamos a demostrar la existencia de $E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)}) \subset A$, $i \in N$. Consideremos $\{\mathbf{e}_n \mid n \in N\}$, base ortonormal de H, y sean

$$L^{(1)} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \ldots], \ldots, L^{(i)} = [\mathbf{e}_{i+1}, \ldots], \ldots$$

Fijamos una sucesión monótona creciente $\{r_i\}$ tal que $r_i \to \infty$ y otra sucesión decreciente $\{\varepsilon_n\} \ni \varepsilon_n \to 0$.

Para r_1, $\exists\, p_1, \varepsilon_{q_1} \ni E_{\varepsilon_{q_1}}(E^{(p_1)}) \subset A$, donde $E^{(p_1)}$ designa la bola abierta de radio r_1, contenida en $L^{(p_1)} = [\mathbf{e}_{p_1+1}, \ldots]$. Para demostrarlo procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos que para $\forall\, \varepsilon_n$ y $\forall\, p_i$, $E_{\varepsilon_n}(E^{(p_i)}) \not\subset A$. Fijada $E^{(i)}$, para cada n, $\exists\, \mathbf{x}_n^{(i)} \in E_{\varepsilon_n}(E^{(i)}) \ni \mathbf{x}_n^{(i)} \notin A$. Para cada i, por tanto, tenemos una sucesión en estas condiciones, luego disponemos del cuadro de sucesiones:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{x}_1^{(1)}, \mathbf{x}_2^{(1)}, \ldots \mathbf{x}_n^{(1)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \ldots, \mathbf{x}_n^{(i)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \{\mathbf{x}_n^{(i)}\} \not\subset A.$$

Estas sucesiones son doblemente acotadas, siendo r_0 una cota inferior $(\mathbf{x}_n^{(i)} \notin E^{(0)})$ y la cota superior viene dada en función de r_1 y de $\{\varepsilon_n\}$.

La sucesión diagonal $\{\mathbf{x}_i^{(i)}\}$ tiende débilmente a $\mathbf{o}$, $\mathbf{x}_i^{(i)} \underset{i\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o}$, pues $\| \mathbf{x}_i^{(i)} \|$ es acotada superiormente y por construcción

$$\alpha\,(\mathbf{x}_i^{(i)}, [\mathbf{e}, \ldots, \mathbf{e}_i]) \underset{i\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2} \Longrightarrow (\mathbf{x}_i^{(i)}, \mathbf{e}_j) \underset{i\to\infty}{\to} 0 \ (j = 1, 2, \ldots).$$

Luego $\mathbf{x}_i^{(i)} \underset{i\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{o}$, [1] (*). Pero $\{\mathbf{x}_i^{(i)}\} \not\subset A$, lo cual es absurdo, por la misma definición de A.

Hacemos esta misma operación para cada término de la sucesión $\{r_i\}$ y tenemos así construidos los $E_{\varepsilon_{q_i}}(E^{(p_i)})$, es decir, un conjunto $B \subset A$.

Podemos imponer a B la condición de que los subespacios $L^{(p_i)}$ estén en sucesión decreciente, es decir:

$$L^{(p_1)} \supseteq L^{(p_2)} \supseteq \ldots \supseteq L^{(p_i)} \supseteq \ldots$$

Según la construcción que hemos hecho, si

$$\begin{cases} p_i \leqslant p_{i+1} \\ r_i \leqslant r_{i+1} \qquad (r_i \to \infty), \end{cases}$$

los radios de las bolas crecen con la codimensión, y ya estarían los subespacios correspondientes ordenados por inclusión.

Supongamos que no fuera así. Ordenamos los $L^{(p_i)}$ por codimensión creciente. Evidentemente, la nueva sucesión de radios $\{r_{p_i}\}$ sigue tendiendo a infinito.

Partimos de r_{p_1}. Si $r_{p_2} \geqslant r_{p_1}$, están en la posición deseada. Si $r_{p_2} < < r_{p_1}$, sea r_{q_2} el primer radio de la sucesión que sea $\geqslant r_{p_1}$. Suprimimos los $E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)})$ intermedios. Reiterando este proceso indefinidamente, conseguimos un nuevo $\tilde{B} \subset B$, que verifica la condición deseada.

(*) Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía.

2. Sea $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ la topología de la convergencia compacta en H [2]. En ella $\mathfrak{S}$ es la familia de los compactos $S \subset H$. Un entorno de $\mathbf{o}$ en $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ viene dado por

$$M(S, \varepsilon) = \{\mathbf{z}, \mid (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mid < \varepsilon, \mathbf{x} \in S\}. \tag{a}$$

Al variar $S \in \mathfrak{S}$ y $\varepsilon > 0$, obtenemos la base de entornos de $\mathbf{o}$ y en consecuencia, una base de entornos para cualquier $\mathbf{p} \in H$, puesto que dicha topología es invariante por traslación [2]. Vamos a establecer la identidad de las topologías $\mathcal{T}_c$ y $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$. Para ello nos apoyaremos en el hecho inmediato de que la topología $\mathcal{T}_c$ en H es la topología más fina entre todas aquellas cuya convergencia asociada es la débil.

PROPOSICIÓN 2.—*La convergencia asociada a $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ en H es la convergencia débil.*

Antes de abordar la demostración, consideremos el siguiente lema:

LEMA 1. — *Si $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$, y S es un compacto cualquiera, se verifica $(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) \to (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ uniformemente para $\forall\, \mathbf{z} \in S$.*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que dicha convergencia no fuese uniforme, entonces

$$\exists\, \varepsilon \ni \forall\, n,\ \exists\, \mu_n > n \wedge \mathbf{z}_n \in S,$$

tales que

$$\mid (\mathbf{x}_{\mu_n}, \mathbf{z}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{z}_n) \mid \geqslant \varepsilon.$$

Formamos la sucesión $\{\mathbf{z}_n\}$, que por estar contenida en un compacto, tiene un punto de acumulación $\mathbf{z}$. Es decir, $\mathbf{z}_n \underset{n \to \infty}{\to} \mathbf{z}$.

De

$$\mathbf{x}_{\mu_n} \rightharpoonup \mathbf{x} \Longrightarrow \begin{cases} (\mathbf{x}_{\mu_n}, \mathbf{z}_n) \to (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ (\mathbf{x}, \mathbf{z}_n) \rightharpoonup (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \end{cases}$$

y al pasar al límite en $\mid (\mathbf{x}_{\mu_n}, \mathbf{z}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{z}_n) \mid \geqslant \varepsilon$ para $n \to \infty$, tendríamos $\mid (\mathbf{x}, \mathbf{z}) - (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \mid \geqslant \varepsilon$, lo que es absurdo.

Hemos demostrado así que la convergencia es uniforme en todo compacto S. Puede verse inmediatamente que es válida la proposición recíproca de ésta.

Si $(\mathbf{x}_n, \mathbf{z})$ converge uniformemente en todo compacto, entonces $\exists\, \mathbf{x} \ni \mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$. Basta considerar los compactos $S = \{\mathbf{z}\}$ formados por un solo elemento [1].

Una vez probado el lema 1, la demostración de la proposición 2 es inmediata, al aplicar al espacio de Hilbert el resultado de Dugundji [3] (cap. XII, teor. 7.2), que enunciamos a continuación:

$$\text{«}\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x} \text{ uniformemente en todo subcojunto compacto} \Longleftrightarrow \mathbf{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}} \mathbf{x}\text{».}$$

3. Por la proposición 2 y las observaciones precedentes,

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{S}} \prec \mathcal{T}_c.$$

Demostraremos que de hecho ambas coinciden, apoyándonos para ello en un resultado de Schaefer y en las siguientes proposiciones.

Designamos por $\mathcal{T}_d$ la topología débil en $\overline{\text{H}}$.

Es inmediato que en (a) puede sustituirse el signo $<$ por $\leqslant$. Es fácil ver entonces que podemos considerar indistintamente conjuntos compactos y relativamente compactos.

Proposición 3.—*Las topologías inducidas por $\mathcal{T}_c$ y $\mathcal{T}_d$ en una bola M cualquiera de centro* $\mathbf{o}$, *coinciden.*

Demostración.—Veamos que $\mathcal{T}_c \prec \mathcal{T}_d$ en M. Para establecer este resultado hemos de construir, para todo $\mathcal{T}_c$-entorno de $\mathbf{o}$ básico $B = E^{(0)} \cup \bigcup E_{\varepsilon_i} (E^{(p_i)})$ fijo, un $\mathcal{T}_d$-entorno de $\mathbf{o}$, V, tal que

$$V \cap M \subset B \cap M.$$

En B, sin restringir la generalidad (proposición 1), puedo suponer que $E^{(p_i)} \subset L^{(p_i)} = [\mathbf{e}_{p_i+1}, \ldots]$, donde $\{\mathbf{e}_i\}$ designa una base ortonormal de H.

Si $r < r_0$ (r = radio de M, r_0 = radio de $E^{(0)}$), trivialmente $B \cap M = M$ y entonces cualquier $\mathcal{T}_d$-entorno de **o** cumple

$$V \cap M \subset M = B \cap M.$$

Supongamos, pues, $r > r_0$. Como $r_i \underset{i \to \infty}{\to} \infty$, existe k tal que $r_{k-1} \leqslant r < r_k$. Consideramos el correspondiente $E_{\varepsilon_k}(E^{(p_k)})$. Para construir V elegimos

$$\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{k}} \varepsilon_k,$$

y las formas lineales $f_1, \ldots, f_k$ que determinan a $L^{(p_k)}$, que en este caso serán los vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$. Con esta definición de V se verifica

$$V \cap M \subset B \cap M.$$

En efecto, sea $\mathbf{x} \in V \cap M$. Entonces

$$\| \mathbf{x} \| < r \wedge |(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Descomponemos $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$, siendo

$$\mathbf{x}' \in [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k], \; \mathbf{x}'' \in [\mathbf{e}_{k+1}, \ldots].$$

Tenemos

$$\| \mathbf{x} \|^2 = \| \mathbf{x}' \|^2 + \| \mathbf{x}'' \|^2 < r^2 \Longrightarrow \| \mathbf{x}'' \| < r \Longrightarrow \mathbf{x}'' \in E^{(p_k)}.$$

$$\| \mathbf{x}' \|^2 = (\mathbf{x}', \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{x}', \mathbf{e}_2)^2 + \ldots + (\mathbf{x}', \mathbf{e}_k)^2 < k \frac{\varepsilon_k^2}{k} = \varepsilon_k^2.$$

Por tanto, comprobamos que

$$\mathbf{x} \in E_{\varepsilon_k}(E^{(p_k)}).$$

Recíprocamente, $\mathcal{T}_d \prec \mathcal{T}_c$ en M, ya que $\mathcal{T}_c \prec \mathcal{T}_d$ en todo H.

Queda, pues, demostrado que en M inducen la misma topología $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_c$.

PROPOSICIÓN 4.—*$\mathcal{T}_c$ es la topología más fina de las que inducen en los conjuntos acotados $\mathcal{T}_d$.*

DEMOSTRACIÓN.—Por definición misma de acotación, podemos referirnos a bolas, de centro **o**.

Sea $\mathcal{T}$ una topología con la propiedad mencionada, **O** un $\mathcal{T}$-entorno de **o** y M una bola cualquiera de centro del origen. Vamos a construir un $\mathcal{T}_c$-entorno de **o**, contenido en **O**, con lo cual quedará demostrado que $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}_c$, al tener en cuenta que ambas son invariantes por traslación.

Elegimos una sucesión de bolas M_i con centro **o**, de radios crecientes s_i tendiendo a infinito.

Por la hipótesis de partida, $O \cap M_i \supset V_i \cap M_i$ $(\forall i)$, donde V_i designa para todo i un $\mathcal{T}_d$-entorno de **o**, $V_{i,}(f_{i,}, \ldots, f_{i_{m_i}}; \eta_i)$.

Tenemos $O \cap M_1 \supset V_1 \cap M_1$, $V_1(f_1, f_2, \ldots, f_{m_1}; \eta_1)$. Para construir B elegimos $E^{(0)}$, bola de centro **o** y radio $r_0 \leqslant \inf\{s_1, \eta_1\}$, $L^{(p_1)}$, subespacio dado por $f_1, \ldots, f_{m_1}$ $E^{(p_1)} \subset L^{(p_1)}$ y E_{ε_1} $(E^{(p_1)})$ determinados por $\varepsilon_1 < \eta_1$ y $r_1 < s_1 - \varepsilon_1$. Repetimos esta construcción y para $i \in \mathbf{N}$ elegimos $L^{(p_i)}$ como subespacio determinado por $f_{i_1}, \ldots, f_{i_{m_i}}$. $E^{(p_i)} \subset L^{(p_i)}$ y $E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)})$, donde $\varepsilon_i < \eta_i \wedge \varepsilon_i \to 0$ y $r_i < s_i - \varepsilon_i$.

De este modo tenemos $B = E^{(0)} \cup \bigcup\limits_i E_{\varepsilon_i}(E^{(p_i)})$, que evidentemente cumple $B \subset \bigcup\limits_i (O \cap M_i) \Longrightarrow B \subset O \Longrightarrow$

$$\mathcal{T} \prec \mathcal{T}_c.$$

De acuerdo con un resultado de Schaefer ([2], p. 83), todo subconjunto equicontinuo de $\mathcal{L}$ (H, R) = H es acotado en cualquier $\mathfrak{S}$-topología, y por ser la topología fuerte una $\mathfrak{S}$-topología, se verifica que todo subconjunto fuertemente equicontinuo, es acotado. Por esta razón, la proposición 4 puede enunciarse en particular de la siguiente forma:

PROPOSICIÓN 5.—*La topología $\mathcal{T}_c$ es la topología más fina de las que subordinan en los conjuntos equicontinuos $\mathcal{T}_d$, topología débil.*

De nuevo estamos en condiciones de aplicar otro resultado de [2], página 151, y concluimos que:

$\mathcal{T}_c$ es la topología de la convergencia precompacta.

En el espacio de Hilbert coinciden los conjuntos precompactos y los relativamente compactos. Como en la $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$ podíamos hablar indistintamente de compactos y relativamente compactos, podemos afirmar que

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}_{\mathfrak{S}} .$$

Es inmediato comprobar directamente que $\mathcal{T}_c$, invariante por traslación, confiere a H una estructura de espacio vectorial topológico. En efecto, la base $\mathcal{B}$ de entornos de **o** que hemos definido está formada por conjuntos B equilibrados, absorbentes y tales que para

$$\forall\, \mathrm{B},\ \exists\, \mathrm{B}' = \mathrm{E}^{(0)}_{r_0/2} \cup \bigcup \mathrm{E}_{\varepsilon_i/2}\,(\mathrm{E}^{(p_i)}_{r_i/2}) \ni \mathrm{B}' + \mathrm{B}' \subset \mathrm{B}.$$

Por otro camino también sabemos que $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$, topología de la convergencia precompacta en H $= \mathcal{L}$ (H, R), por ser H un e. v. t., **R** localmente convexo y la familia de subconjuntos de H precompactos total en H, es una topología localmente convexa ([2], p. 80) y en este caso automáticamente por ([2], p. 151) (H, $\mathcal{T}_{\mathfrak{S}}$) es un e. v. t. Con lo cual (H, $\mathcal{T}_c$) no sólo es un e. v. t., sino además un espacio localmente convexo.

4. De acuerdo con [2], p. 81, como caso particular, la topología fuerte $\mathcal{T}_f$ en H coincide con la $\mathfrak{S}$-topología engendrada por la familia $\mathfrak{S} = \{\mathrm{M}\,(\mathrm{S}, \varepsilon),\ \mathrm{S} \subset \mathrm{H},\ \text{acotado},\ \varepsilon \in \mathbf{R}^+\}$.

Sabemos que entre las topologías $\mathcal{T}_d$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_f$ existe la relación: $\mathcal{T}_d \prec \mathcal{T}_c \prec \mathcal{T}_f$.

$\mathcal{T}_f$ coincide con la topología de Mackey en el espacio de Hilbert ([2], p. 131) y por tanto es consistente con $\langle \mathrm{H}, \mathrm{H}' \rangle$. $\mathcal{T}_d$ también es consistente con $\langle \mathrm{H}, \mathrm{H}' \rangle$ y es en particular la menos fina con esa propiedad. Por estas dos razones $\mathcal{T}_c$, comprendida entre dos topologías consistentes, es también consistente con $\langle \mathrm{H}, \mathrm{H}' \rangle$.

La familia de conjuntos acotados es idéntica para todas las topologías localmente convexas consistentes con $\langle \mathrm{H}, \mathrm{H}' \rangle$ ([2], p. 132), y por tanto coinciden los $\mathcal{T}_d$-acotados, los $\mathcal{T}_c$-acotados y los $\mathcal{T}_f$-acotados.

Lema 2.—*Los $\mathcal{T}_c$-relativamente compactos y los $\mathcal{T}_f$-acotados coinciden.*

Demostración.—«Todo subconjunto acotado de un e. l. c. E, es

σ (E, E′)-precompacto» ([2], cap. IV, corolario 2 de (5.5)). También tenemos que:

«Si E es un e. l. c. tonelado, E′ es cuasi-completo para toda $\mathfrak{S}$-topología en que $\mathfrak{S}$ consta de conjuntos acotados que resubren E′» ([2], cap. IV, (6.1)). En consecuencia (H, $\mathcal{T}_c$) es cuasi-completo y coincidirán los precompactos y los relativamente compactos. De ahí que todo conjunto $\mathcal{T}_f$-acotado es $\mathcal{T}_c$-relativamente compacto.

Recprocamente, sea M $\mathcal{T}_c$-relativamente compacto. Su $\mathcal{T}_c$-clausura, $\overline{M}$, es compacta. Como $\mathcal{T}_d \prec \mathcal{T}_c$, $\overline{M}$ será $\mathcal{T}_d$-compacta y por ser la clausura de un subconjunto compacto de un espacio regular también compacta, $\overline{M}$ será $\mathcal{T}_d$-relativamente compacto. Entonces, de acuerdo con ([2], p. 141), será $\mathcal{T}_f$-acotado.

Por tanto, en la topología de la convergencia acotada ([2], p. 81) podemos sustituir los conjuntos acotados por los $\mathcal{T}_c$-relativamente compactos y llegamos así a la siguiente relación dual entre las topologías $\mathcal{T}_c$ y $\mathcal{T}_f$:

1. $\mathcal{T}_c$ es una $\mathfrak{S}$-topología, en la que la familia $\mathfrak{S}$ está formada por los conjuntos $\mathcal{T}_f$-relativamente compactos.

2. $\mathcal{T}_f$ es una $\mathfrak{S}$-topología, en la que la familia $\mathfrak{S}$ está formada por los conjuntos $\mathcal{T}_c$-relativamente compactos.

Agradezco a D. Antonio Plans su orientación y aliento en la realización de este trabajo.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias
Zaragoza

Bibliografía

[1] Julia II, G.: *Introduction Mathématique aux Théories Quantiques.* Gauthier Villars (1955).
[2] Schaefer, H. H.: *Topological Vector Spaces.* Macmillan (1966).
[3] Dugundji, J.: *Topology.* Allyn and Bacon (1966).
[4] Alaoglu: *Weak Topologies of Normal Linear Spaces.* «Ann. Math.», 41, p. 252-267 (1940).
[5] Köthe, G.: *Topological Vector Spaces I.* Springer Verlag (1969).
[6] Bourbaki: *Topologie Générale* (chap. 10). Hermann (1961).