Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **58:** 115–128, (2003).

Caracteres del grupo aditivo de los racionales

Elena Cillero Sanz *

Depto. de Geometría y Topología. Facultad de Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid. 28040 Madrid

e-mail: ecillero@mat.ucm.es

Resumen

En este trabajo caracterizamos mediante técnicas elementales los duales del grupo de los racionales $\mathbb{Q}$, cuando se le dota de diversas topologías de grupo que aparecen frecuentemente en la literatura como la topología usual, la discreta y las p-ádicas, así como las topologías de Bohr inducidas por todas las anteriores. Obtenemos además condiciones suficientes para que el dual de un grupo topológico G sea de primera categoría en el grupo de todos los caracteres $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$, dotado de la topología de la convergencia puntual. Por último aplicamos este resultado a los grupos topológicos anteriormente mencionados.

1 Introducción.

En este trabajo se aborda el estudio del grupo dual de los racionales $\mathbb{Q}$, cuando se le dota de diversas topologías de grupo que aparecen frecuentemente en la literatura como la topología usual, la discreta y las p-ádicas y las topologías de Bohr inducidas por todas las anteriores. En la sección 2 se construyen explícitamente isomorfismos topológicos que permiten asociar dichos duales a grupos conocidos.

En la sección 3 se estudia el "tamaño" (desde el punto de vista de la teoría de categorías de Baire) del dual de un grupo topológico visto como subespacio del grupo de todos los caracteres. Más concretamente, bajo ciertas hipótesis, el dual es de primera categoría, como es el caso de los grupos estudiados. Además, se proporcionan ejemplos concretos de caracteres no continuos.

A continuación se introduce la notación que será usada a lo largo del trabajo. Al grupo aditivo de los números racionales dotado de la topología discreta, lo denotamos por $\mathbb{Q}_d$;

*Este artículo se ha desarrollado bajo la supervisión de la Profesora Elena Martín Peinador.

$\mathbb{Q}_u$ será el grupo de los racionales dotado de la topología usual y $\mathbb{R}_u$ el grupo aditivo de los reales dotado, también, de la topología usual.

Dado un número primo p, la *valoración p-ádica* en $\mathbb{Q}$ se define como:

$$\begin{array}{rcl} |.|_p : \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x|_p := \begin{cases} 2^{-r} & \text{si } x = p^r \frac{m}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N},\, m, r \in \mathbb{Z} \text{ y } p \nmid m,\, p \nmid n \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

A partir de dicha valoración se define la *métrica p-ádica* que induce una topología de grupo en $\mathbb{Q}$, llamada *topología p-ádica* y que denotaremoa por τ_p. Una base de entornos abiertos de 0 en τ_p viene dada por $\{U_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$, siendo:

$$U_l := \left\{x \in \mathbb{Q} : |x|_p < 2^{-l}\right\} = \left\{p^l \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{Z}, p \nmid n\right\}$$

A $\mathbb{Q}$ dotado de la topología p-ádica, lo denotamos por $(\mathbb{Q}, \tau_p)$.

2 Caracterización de los duales de $\mathbb{Q}$.

Dado un grupo topológico G, llamaremos *carácter* de G a un homomorfismo de G en $\mathbb{T}$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia unidad del plano complejo con su estructura multiplicativa heredada. Llamaremos *dual* de G al grupo formado por todos los caracteres continuos de G dotado de la topología compacto-abierta. El dual de G, denotado por $G^\wedge$, es a su vez un grupo topológico, por tanto tiene sentido hablar del bidual $G^{\wedge\wedge}$. El famoso teorema de dualidad de Pontryagin afirma que todo grupo topológico abeliano localmente compacto (LCA) es topológicamente isomorfo a su bidual de forma canónica. Aquellos grupos topológicos cuya aplicación canónica en el bidual es isomorfismo topológico reciben el nombre de grupos *reflexivos*, o *reflexivos en sentido de Pontryagin*.

A continuación se estudia el dual de $\mathbb{Q}$ dotado de diversas topologías. En el caso de la topología usual y de las topologías p-ádicas las demostraciones transcurren de modo paralelo apoyándose en el hecho de que las complecciones de los racionales en ambos casos (los números reales y p-ádicos, respectivamente) son grupos abelianos localmente compactos cuyos duales son conocidos. Cabe observar, que los resultados de las proposiciones 2.2 y 2.4 se pueden obtener como consecuencia de un teorema más fuerte para grupos abelianos metrizables [3, Teorema 2, p.25]. Sin embargo, en nuestra demostración se prueba que el isomorfismo algebraico natural es, de hecho, un isomorfismo topológico, utilizando argumentos elementales. En [11, Capítulo 3, Sección 2] Raczkowski-Trigos obtiene, de forma independiente, una demostración similar de la proposición 2.2.

Las demostraciones de 2.2 y 2.4 se apoyan en el siguiente resultado:

Proposición 2.1 *Sea G un grupo topológico abeliano y sea H un subgrupo denso. Entonces todo carácter continuo de H se puede extender a G, es decir, H está dualmente sumergido en G.*

Demostración: Sea $\chi : H \to \mathbb{T}$ carácter continuo. Dado $x \in \overline{H} = G$, existe $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ red en H tal que $x_\lambda \to x$. Definimos

$$\widetilde{\chi}\,(x) := \lim_{\lambda \in \Lambda} \chi(x_\lambda)$$

Se puede ver que $\widetilde{\chi}$ está bien definida y es un carácter continuo de G que restringido a H coincide con χ. $\square$

Dual de $\mathbb{Q}_u$

Proposición 2.2 *El dual de $\mathbb{Q}$ con la topología usual es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{Q}_u^\wedge \cong \mathbb{R}_u$.*

Demostración: Consideramos la aplicación restricción:

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{R}_u^\wedge & \to & \mathbb{Q}_u^\wedge \\ \chi & \mapsto & \chi_{|\mathbb{Q}_u} \end{array}$$

que es, claramente, un homomorfismo. Dado que $\overline{\mathbb{Q}}_u = \mathbb{R}_u$ se puede ver que ρ es inyectivo y, además por la proposición 2.1, también es suprayectivo. Asi pues, ρ es un isomorfismo algebraico entre $\mathbb{R}_u^\wedge$ y $\mathbb{Q}_u^\wedge$.

Sea

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathbb{R}_u & \to & \mathbb{R}_u^\wedge \\ r & \mapsto & \chi_r \end{array}$$

donde $\chi_r(x) = e^{2\pi i r x}$ para cada $x \in \mathbb{R}_u$. Como γ es un isomorfismo topológico [7, Ejemplo 23.27(e), p. 367], la composición $\theta := \rho \circ \gamma$ es un isomorfismo algebraico entre $\mathbb{R}_u$ y $\mathbb{Q}_u^\wedge$. Veamos que de hecho θ es un isomorfismo topológico:

- θ es continua:

  Dados K un compacto de $\mathbb{Q}_u$ y $\varepsilon > 0$, $P(K, R_\varepsilon) := \{\chi \in \mathbb{Q}_u^\wedge : \chi(K) \subseteq V\}$ es un entorno de 1 en $\mathbb{Q}_u^\wedge$, siendo $R_\varepsilon := \{e^{2\pi i t} : |t| < \varepsilon\}$.

  Como K es compacto en $\mathbb{Q}_u$, K es acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in K$.

  Tomemos $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ y sea $r \in (-\delta, \delta)$. Como $\theta(r)(x) = \chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}}(x) = e^{2\pi i r x}$ y para todo $x \in K$ se tiene que $|rx| = |r||x| < \delta M = \varepsilon$, resulta que $\theta(r)(x) \in R_\varepsilon$ para cada $x \in K$, es decir, $\theta(r) \in P(K, R_\varepsilon)$ y, por tanto, $\theta\left((-\delta, \delta)\right) \subseteq P(K, R_\varepsilon)$.

- θ es abierta:

  Sea $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ un entorno básico de 0 en $\mathbb{R}_u$, con $n \geq 4$ entero.

  Si tomamos $K := \{0\} \cup \{1\} \cup \{-1\} \cup \left\{\frac{1}{2m} : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ compacto en $\mathbb{Q}_u$, entonces $P(K, R_{\frac{1}{n}})$ es un entorno de 1 en $\mathbb{Q}_u^\wedge$. Sea $1 \neq \chi \in P(K, R_{\frac{1}{n}})$ y sea $0 \neq r \in \mathbb{R}_u$ tal que $\theta(r) = \chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}} = \chi$, entonces $|r| < \frac{1}{n}$ pues cada una de las siguientes posibilidades nos lleva a contradicción:

(i) Si $\frac{1}{n} \leq r \leq \frac{n-1}{n}$, entonces $\chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}}(1) = e^{2\pi i r 1} = e^{2\pi i r} \notin R_{\frac{1}{n}}$

(ii) Si $\frac{n-1}{n} < r$, como $n \geq 4$, entonces $r > \frac{2\,(n-1)}{(n-2)\,n}$.

Pero
$$\begin{aligned} r > \frac{2\,(n-1)}{(n-2)\,n} &\iff r(n(n-2)) > 2(n-1) \iff \\ &\iff rn(n-1) > rn + 2(n-1) \iff \\ &\iff \frac{rn}{2} > \frac{rn}{2(n-1)} + 1 > 0 \end{aligned}$$

por lo que existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de modo que
$$\frac{rn}{2} \geq l \geq \frac{rn}{2(n-1)} \quad \text{y así} \quad \frac{1}{n} \leq \frac{r}{2l} \leq \frac{(n-1)}{n}.$$

Por tanto $\chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}}\left(\frac{1}{2l}\right) = e^{2\pi i r \frac{1}{2l}} \notin R_{\frac{1}{n}}$

(iii) Si $-\frac{n-1}{n} \leq r \leq -\frac{1}{n}$, entonces $\frac{n-1}{n} \geq -r \geq \frac{1}{n}$, con lo que se tiene que $\chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}}(-1) = e^{2\pi i r(-1)} = e^{2\pi i(-r)} \notin R_{\frac{1}{n}}$

(iv) Si $r < -\frac{n-1}{n}$, entonces $-r > \frac{n-1}{n}$ y por (ii) existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \frac{-r}{2l} \leq \frac{(n-1)}{n}$.

Por tanto $\chi_{r_{|\mathbb{Q}_u}}\left(\frac{-1}{2l}\right) = e^{2\pi i r \frac{-1}{2l}} = e^{2\pi i \frac{-r}{2l}} \notin R_{\frac{1}{n}}$

De este modo, como $r \in (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$, si $\theta(r) = \chi_{r_{|\mathbb{Q}}} = \chi \in P(K, R_{\frac{1}{n}})$, resulta que $P(K, R_{\frac{1}{n}}) \subseteq \theta\left((\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})\right)$. □

Corolario 2.3 *$\mathbb{Q}$ dotado de la topología usual no es reflexivo en el sentido de Pontryagin, es decir, $\mathbb{Q}_u$ no es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Q}_u^{\wedge\wedge}$.*

Demostración: La afirmación se sigue de la proposición 2.2 y del hecho de que $\mathbb{R}_u^{\wedge} \cong \mathbb{R}_u$. □

Dual de $(\mathbb{Q}, \tau_p)$

Sea p un número primo, consideramos el conjunto
$$\mathbb{Q}_p := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \{0, \ldots, p-1\}\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ y } \exists n_0 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x_n = 0\ \forall\, n < n_0\right\}$$

y en él definimos la *suma* del siguiente modo:

Sean $\tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, con $x_n = 0$ para todo $n < n_0$ y $x_{n_0} \neq 0$, e $\tilde{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, con $y_n = 0$ para todo $n < m_0$ y $y_{m_0} \neq 0$, entonces $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x+y} := \Big((x+y)_n\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$ siendo:
$$(x+y)_n = 0 \qquad \text{para todo } n < p_0 = \min\{n_0, m_0\}$$
$$x_{p_0} + y_{p_0} = s_{p_0} p + (x+y)_{p_0} \text{ con } (x+y)_{p_0} \in \{0, \ldots, p-1\} \text{ y } s_{p_0} \in \mathbb{Z}$$

y para todo $n > p_0$ recursivamente, conociendo $(x+y)_{n-1}$ y s_{n-1}

$$x_n + y_n + s_{n-1} = s_n p + (x+y)_n \text{ con } (x+y)_n \in \{0, \ldots, p-1\} \text{ y } s_n \in \mathbb{Z}$$

El conjunto $\mathbb{Q}_p$ con la suma arriba definida, es el grupo abeliano de los *números p-ádicos*, siendo su elemento neutro $\tilde{0} = (0)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definimos:

Dado $k \in \mathbb{Z}$, $V_k := \{\tilde{x} \in \mathbb{Q}_p : x_n = 0 \; \forall\, n < k\}$

Dados $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Q}_p$, $\tilde{x} \neq \tilde{y}$, $d_p(\tilde{x}, \tilde{y}) := 2^{-m}$ donde $m = \min\{n \in \mathbb{Z} : x_n \neq y_n\}$

Dado $\tilde{x} \in \mathbb{Q}_p$, $\quad d_p(\tilde{x}, \tilde{x}) := 0$

Por [7, Teorema 10.5, p. 110], los conjuntos $\{V_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfacen las condiciones para ser una base de entornos de 0 para una topología de grupo en $\mathbb{Q}_p$. Bajo esta topología $\mathbb{Q}_p$ es Hausdorff y localmente compacto, los conjuntos V_k son subgrupos compactos de $\mathbb{Q}_p$ y la función d_p es una métrica invariante sobre $\mathbb{Q}_p$, compatible con la topología de $\mathbb{Q}_p$. En [7, Teoremas 10.10 y 10.11, p. 112] se prueba que, de hecho, los números p-ádicos son un cuerpo topológico.

Es un hecho conocido que $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ se encaja homomorfa y topológicamente de manera densa en $\mathbb{Q}_p$. El encaje natural viene dado por:

$$\begin{aligned} i : (\mathbb{Q}, \tau_p) &\to \mathbb{Q}_p \\ x &\mapsto \tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad \text{con } \; x_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ \lambda_n & \text{si } n \geq n_0 \end{cases} \end{aligned}$$

donde los λ_n se obtienen al escribir x de manera única como $x = \sum_{j=n_0}^{\infty} \lambda_j p^j$ con $\lambda_j \in \{0, \ldots, p-1\}$ para todo $n_0 \leq j \in \mathbb{Z}$, $\lambda_{n_0} \neq 0$ y $n_0 \in \mathbb{Z}$.

De hecho, un número p-ádico $\tilde{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es racional si y solo si la sucesión de coordenadas x_n es periódica a partir de cierto n (ver [6, Capítulo 9, p. 147]).

Proposición 2.4 *El dual de $\mathbb{Q}$ con la topología p-ádica es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Q}_p$, es decir, $(\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge \cong \mathbb{Q}_p$.*

Demostración: Consideramos la aplicación restricción:

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Q}_p^\wedge &\to (\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge \\ \chi &\mapsto \chi_{|\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

que es, claramente, un homomorfismo. Dado que $\overline{(\mathbb{Q}, \tau_p)} = \mathbb{Q}_p$ se puede demostrar que ρ es inyectivo y, además por la proposición 2.1, también es suprayectivo. Asi pues, ρ es un isomorfismo algebraico entre $\mathbb{Q}_p^\wedge$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge$.

Sea

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{Q}_p &\rightarrow \mathbb{Q}_p^{\wedge} \\ \tilde{x} &\mapsto \chi_{\tilde{x}} \end{aligned}$$

donde

$$\chi_{\tilde{x}}(\tilde{y}) = e^{2\pi i\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \left(\sum_{s=n}^{\infty} \frac{x_{-s}}{p^{s-(n-1)}}\right)\right)}$$

para todo $\tilde{y} \in \mathbb{Q}_p$. Como θ es un isomorfismo topológico [7, 25.1, p. 400], la composición $\theta' := \rho \circ \theta$ es un isomorfismo algebraico entre $\mathbb{Q}_p$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)^{\wedge}$. Veamos que de hecho θ' es un isomorfismo topológico:

- θ' es continua:
  Dados F un compacto de $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ y $\varepsilon > 0$, $P(F, R_\varepsilon)$ es un entorno de 1 en $(\mathbb{Q}, \tau_p)^{\wedge}$. Como F es compacto y $\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$ (siendo los U_k los entornos abiertos de 0 en la topología p-ádica), existen $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$. Sea $m := \min\{k_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces $U_{k_i} \subseteq U_m$ para todo $1 \leq i \leq n$ y por tanto $F \subseteq U_m$. Si consideramos V_{-m} abierto de $\mathbb{Q}_p$, se puede ver que $U_m \subseteq V_{m+1}$ y como $\{\chi_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in V_{-k+1}\} = \{\chi_{\tilde{x}} : \chi_{\tilde{x}}(V_k) = \{1\}\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \theta'(V_m) &= \rho\left(\{\chi_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in V_{-m}\}\right) = \rho\left(\{\chi_{\tilde{x}} : \chi_{\tilde{x}}(V_{m+1}) = \{1\}\}\right) = \\ &= \left\{\chi_{\tilde{x}_{|\mathbb{Q}}} : \chi_{\tilde{x}}(V_{m+1}) = \{1\}\right\} \subseteq \left\{\chi_{\tilde{x}_{|\mathbb{Q}}} : \chi_{\tilde{x}}(U_m) = \{1\}\right\} \subseteq \\ &\subseteq P(U_m, \varepsilon) \subseteq P(F, \varepsilon) \end{aligned}$$

- θ' es abierta:
  Sea V_m, con $m \in \mathbb{Z}$, un entorno abierto de 0 en $\mathbb{Q}_p$. Sea, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{p^n}$ la imagen por el encaje i del entero p^n, que tiene la forma $\widetilde{p^n} = (\delta_{nm})_{m \in \mathbb{Z}}$. Si tomamos $K = \{\tilde{0}\} \cup \{\widetilde{p^n} : n \in \mathbb{Z}\}$ compacto en $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ y $\varepsilon = \dfrac{1}{p}$, entonces $P(K, R_\varepsilon)$ es un entorno de 1 en $(\mathbb{Q}, \tau_p)^{\wedge}$. Sea $1 \neq \chi \in P(K, R_\varepsilon)$ y sea $0 \neq \tilde{x} \in \mathbb{Q}_p$ tal que $\theta'(\tilde{x}) = \chi_{\tilde{x}_{|\mathbb{Q}}} = \chi$, entonces $\tilde{x} \in V_m$ pues:
  Supongamos que $\tilde{x} \notin V_m$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$, $n < m$, tal que $x_n \neq 0$. Si $n_0 := \min\{n \in \mathbb{Z} : x_n \neq 0\}$ ($n_0 < m$ y $x_{n_0} \in \{1, \ldots, p-1\}$), resulta que:

$$x_n = 0 \text{ para todo } n < n_0 \Leftrightarrow x_{-n} = 0 \text{ para todo } n > -n_0$$

  y dado $\tilde{y} \in (\mathbb{Q}, \tau_p)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{x}_{|\mathbb{Q}}}(\tilde{y}) &= e^{2\pi i\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \left(\sum_{s=n}^{\infty} \frac{x_{-s}}{p^{s-(n-1)}}\right)\right)} \\ &= e^{2\pi i\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \left(\sum_{s=n}^{-n_0} \frac{x_{-s}}{p^{s-(n-1)}}\right)\right)} \end{aligned}$$

Así pues:

$$\chi_{\tilde{x}_{|\mathbb{Q}}}(\widetilde{u^{-n_0}}) = e^{2\pi i\left(\sum\limits_{n=-n_0}^{-n_0} 1 \left(\sum\limits_{s=-n_0}^{-n_0} \frac{x_{-s}}{p^{s-(-n_0-1)}}\right)\right)}$$

$$= e^{2\pi i \frac{x_{n_0}}{p^{n_0-(-n_0-1)}}} = e^{2\pi i \frac{x_{n_0}}{p}} \notin R_\varepsilon$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $P(K, R_\varepsilon) \subseteq \theta'(V_m)$. □

Corolario 2.5 *$\mathbb{Q}$ dotado de la topología p-ádica no es reflexivo en el sentido de Pontryagin, es decir, $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ no es topológicamente isomorfo a $(\mathbb{Q}, \tau_p)^{\wedge\wedge}$.*

Demostración: La afirmación se sigue de la proposición 2.4 y del hecho de que $\mathbb{Q}_p^\wedge \cong \mathbb{Q}_p$.

□

Dual de $\mathbb{Q}_d$.

Si dotamos a $\mathbb{Q}$ de la topología discreta, todo homomorfismo de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ es continuo. Por tanto el grupo de caracteres continuos de $\mathbb{Q}_d$ es algebraicamente isomorfo al grupo de caracteres de los racionales $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$, es decir, $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{T}) = \mathcal{C}Hom(\mathbb{Q}_d, \mathbb{T})$. En lo que sigue se da una descripción del dual de $\mathbb{Q}$ con la topología discreta [7, 25.5, p. 404].

Sea para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathbb{T}_n := \mathbb{T}$. Si $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ son tales que $m \leq n$ definimos el homomorfismo continuo:

$$\begin{array}{rcl} g_{nm} : \mathbb{T}_n & \to & \mathbb{T}_m \\ z & \mapsto & z^{\frac{n!}{m!}} \end{array}$$

Como los g_{nm} cumplen:

(i) Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad g_{nn} = 1_{\mathbb{T}} : \mathbb{T}_n \to \mathbb{T}_n$

(ii) Dados $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ con $m < n < p$, $g_{nm} \circ g_{pn} = g_{pm}$

$\{\mathbb{T}_n, g_{nm}, \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ es un sistema inverso y su límite

$$\varprojlim \mathbb{T}_n := \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{T}_n : \ g_{nm}(z_n) = z_m \text{ si } m < n \right\}$$

cumple:

$$\varprojlim \mathbb{T}_n = \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{T}_n : \ z_n^n = z_{n-1} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Definimos

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathbb{Q}_d^\wedge & \to & \varprojlim \mathbb{T}_n \\ \chi & \mapsto & \left(\chi\left(\frac{1}{n!}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \end{array}$$

Se puede demostrar que θ está bien definida y es un homomorfismo inyectivo.
Dado $\boldsymbol{z}= (z_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{T}_n$ tal que $z_n^n = z_{n-1}$, definimos:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\boldsymbol{z}} : \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{T} \\ \frac{m}{n} & \mapsto & z_n^{(n-1)!m} \end{array}$$

$\chi_{\boldsymbol{z}}$ es un homomorfismo bien definido de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{T}$ y además, $\chi_{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{n!}\right) = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, por tanto $\theta\left(\chi_{\boldsymbol{z}}\right) =\boldsymbol{z}$ y θ es sobreyectivo.
θ es continua:
Sea U entorno básico de 0 en $\varprojlim \mathbb{T}_n$, entonces $U = V \cap \varprojlim \mathbb{T}_n$, con V entorno básico de 0 en $\prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{T}_n$, es decir, $V = \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} V_n$ con $0 \in V_n$ abierto para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $V_n = \mathbb{T}$ para cada $n \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\setminus B$ siendo $B \subset \mathbb{N}\setminus\{0\}$ finito. Para cada $n \in B$ existe $\varepsilon_n > 0$ tal que $R_{\varepsilon_n} \subseteq V_n$, entonces tomando $\varepsilon_n > \frac{1}{2}$ para todo $n \notin B$, tenemos que $R_{\varepsilon_n} = \mathbb{T}$ para cada $n \notin B$ y $\prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} R_{\varepsilon_n} \subseteq V$.
Sean $K = \left\{\frac{1}{n!} : n \in B\right\}$ y $\varepsilon = \min\{\varepsilon_n : n \in B\}$. Evidentemente, K, siendo finito, es compacto de $\mathbb{Q}$ y $P(K,\varepsilon)$ es entorno de 0 en $\mathbb{Q}_d^\wedge$. Si $\chi \in P(K,\varepsilon)$, como para todo $n \in B$ $\frac{1}{n!} \in K$, resulta que $\chi\left(\frac{1}{n!}\right) \in R_\varepsilon \subseteq R_{\varepsilon_n}$.
Así $\theta(\chi) = \left(\chi\left(\frac{1}{n!}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} R_{\varepsilon_n} \cap \varprojlim \mathbb{T}_n \subseteq V \cap \varprojlim \mathbb{T}_n = U$, es decir, $\theta(P(K,\varepsilon)) \subseteq U$.
θ es abierta:
Sea $P(K,\varepsilon)$ entorno de 0 en $\mathbb{Q}_d^\wedge$, con $K \subset \mathbb{Q}_d$ compacto y $\varepsilon > 0$.
Como $K \subset \mathbb{Q}_d$, K es finito, es decir, existen $m_i \in \mathbb{Z}$ y $n_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ con $i \in \{1,\ldots,l\}$ y $l \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ de modo que $K = \left\{\frac{m_i}{n_i!} : i \in \{1,\ldots,l\}\right\}$.
Tomamos $B := \{n_i : i \in \{1,\ldots,l\}\}$, $\varepsilon_n := \frac{\varepsilon}{|m_i|}$ para cada $n \in B$ y $\varepsilon_n > \frac{1}{2}$ para todo $n \notin B$. Así $R_{\varepsilon_n} = \mathbb{T}$ para todo $n \notin B$ y $V = \prod_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} R_{\varepsilon_n} \cap \varprojlim \mathbb{T}_n$ es un entorno de 0 en $\varprojlim \mathbb{T}_n$.
Si $\boldsymbol{z}= (z_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \in V$ y $\chi_{\boldsymbol{z}} \in \mathbb{Q}_d^\wedge$ es tal que $\theta\left(\chi_{\boldsymbol{z}}\right) =\boldsymbol{z}$, entonces, por la elección de V, $\chi_{\boldsymbol{z}} \in P(K,\varepsilon)$ y por tanto $V \subseteq \theta(P(K,\varepsilon))$.
Así pues θ es un isomorfismo topológico entre $\mathbb{Q}_d^\wedge$ y $\varprojlim \mathbb{T}_n$.

Dual de $\mathbb{Q}$ con la topología de Bohr

En un grupo topológico abeliano (G,τ) la topología débil (esto es, la topología inicial) asociada a la familia de sus caracteres continuos es una topología de grupo menos fina que la original. Suele denominarse *topología de Bohr* y la denotaremos por $\sigma(G, G^\wedge)$, mientras que G_σ designará a G con la topología de Bohr.

Observación 2.6 *$\sigma(G, G^\wedge)$ es la topología inducida en G por el encaje canónico de G en su compactación de Bohr (ver la introducción en* [4]*).* $\square$

Proposición 2.7 *El dual de un grupo topológico abeliano G es algebraicamente isomorfo al dual de G con de la topología de Bohr, más aún, $G^\wedge = G_\sigma^\wedge$ como conjuntos.*

Demostración: Dado un carácter continuo de G con la topología original, por la definición de topología de Bohr, el carácter también es continuo para $\sigma(G, G^\wedge)$.
Si, por el contrario, se tiene un carácter continuo de G con la topología de Bohr, como la topología de Bohr es menos fina que la topología original, el carácter también es continuo para esta topología. $\square$

Teorema 2.8 *Si G es un grupo localmente compacto y abeliano, entonces los duales de G con su topología original y la topología de Bohr son topológicamente isomorfos, es decir, $G^\wedge \cong G_\sigma^\wedge$.*

Demostración: La proposición 2.7 demuestra que los conjuntos soporte de $G^\wedge$ y $G_\sigma^\wedge$ coinciden. Por otra parte, por ser la topología de Bohr menos fina que la topología original, todo compacto de G en la topología original es compacto en la topología de Bohr. El recíproco es cierto por el teorema de Glicksberg que afirma que en un grupo LCA todo subconjunto compacto en la topología de Bohr es compacto en la topología original [5, Teorema 1.2, p. 269]. Así pues, como τ y $\sigma(G, G^\wedge)$ tienen los mismos compactos, los abiertos de la topología compacto-abierta en cada uno de los duales coinciden, y la identificación de 2.7 no solo es algebraica sino también topológica. $\square$

Corolario 2.9 *El dual de $\mathbb{Q}$ con la topología de Bohr inducida por la topología discreta es topológicamente isomorfo al dual de $\mathbb{Q}$ con la topología discreta, es decir, $(\mathbb{Q}_d)_\sigma^\wedge \cong \mathbb{Q}_d^\wedge$.*

El resultado del corolario 2.9 no se puede afirmar directamente para $\mathbb{Q}_u$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)$, ya que estos no son grupos localmente compactos. Sin embargo existe una generalización del teorema de Glicksberg a una clase más amplia de grupos llamados grupos nucleares. Estos grupos fueron introducidos por Banaszczyk en [1].

Teorema 2.10 *Si G es un grupo nuclear, entonces el dual de G con su topología original y el dual de G dotado de la topología de Bohr son topológicamente isomorfos, es decir, $G^\wedge \cong G_\sigma^\wedge$.*

Demostración: Por la proposición 2.7, para obtener el resultado solo es necesario probar que las topologías coinciden. Ahora bien, todo compacto en la topología original es Bohr-compacto por ser $\sigma(G, G^\wedge)$ menos fina que τ. Además, por la generalización del Teorema de Glicksberg para grupos nucleares [2, Teorema, p. 35], todo compacto en la topología de Bohr es compacto en la topología original. Por tanto, al tener ambas topologías los mismos compactos, los abiertos de la topología compacto-abierta en cada uno de los duales coinciden, y el isomorfismo no solo es algebraico sino también topológico. □

Corolario 2.11

(1) El dual de $\mathbb{Q}$ con la topología de Bohr inducida por la topología usual, $(\mathbb{Q}_u)^\wedge_\sigma$, es topológicamente isomorfo al dual de $\mathbb{Q}$ con la topología usual. Es decir, $(\mathbb{Q}_u)^\wedge_\sigma \cong \mathbb{Q}^\wedge_u$.

(2) El dual de $\mathbb{Q}$ con la topología de Bohr inducida por la topología p-ádica, $(\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge_\sigma$, es topológicamente isomorfo al dual de $\mathbb{Q}$ con la topología p-ádica. Es decir, $(\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge_\sigma \cong (\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge$.

Demostración: La demostración es común para las dos afirmaciones.
Todo grupo localmente compacto y abeliano es un grupo nuclear. Además, la clase de grupos nucleares es cerrada bajo la operación de tomar subgrupos, es decir, todo subgrupo de un grupo nuclear es nuclear. Así pues, como $\mathbb{R}_u$ y $\mathbb{Q}_p$ son localmente compactos y abelianos y $\mathbb{Q}_u$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ son subgrupos suyos, respectivamente, resulta que $\mathbb{Q}_u$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)$ son grupos nucleares y por el teorema 2.10 $(\mathbb{Q}_u)^\wedge_\sigma \cong \mathbb{Q}^\wedge_u$ y $(\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge_\sigma \cong (\mathbb{Q}, \tau_p)^\wedge$. □

3 Encaje de $\mathcal{C}Hom(G, \mathbb{T})$ en $Hom(G, \mathbb{T})$

Dado un grupo topológico G denotamos por $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$ al grupo de caracteres de G dotado de la topología de la convergencia puntual. $\mathcal{C}Hom_\pi(G, \mathbb{T})$ será el grupo de los caracteres continuos de G dotado, también, de la topología de la convergencia puntual.

Proposición 3.1 *Sea G un grupo topológico abeliano discreto. Si Γ es un subgrupo de $G^\wedge$ que separa puntos, entonces $\overline{\Gamma} = G^\wedge$.*

Demostración: Supongamos que $\overline{\Gamma} \subsetneq G^\wedge$ y sea $\chi \in G^\wedge \setminus \overline{\Gamma}$. Es bien sabido que, por ser $\overline{\Gamma}$ un cerrado en $G^\wedge$ g.t. compacto y abeliano, $\overline{\Gamma}$ es dualmente cerrado, es decir, existe un carácter no nulo $\xi \in G^{\wedge\wedge}$ tal que $\xi(\chi) \neq 1$ y $\xi_{|\overline{\Gamma}} \equiv 1$.
Como G es discreto, por el Teorema de Dualidad de Pontryagin [8, Teorema, p. 53], $G \cong G^{\wedge\wedge}$ y por tanto existe un elemento no nulo $g \in G$ tal que $\alpha_G(g) = \xi$.
Así, para todo $\zeta \in \Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$, se tiene que $1 = \xi(\zeta) = \alpha_G(g)(\zeta) = \zeta(g)$, por lo que Γ no separa a g de 0, contradiciendo la hipótesis. □

Corolario 3.2 *Si G es un grupo topológico abeliano tal que $G^\wedge$ separa puntos de G y es cerrado en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$, entonces $G^\wedge = Hom_\pi(G, \mathbb{T})$.*

Demostración: $G^\wedge$ es un subgrupo algebraico de $Hom_\pi(G, \mathbb{T}) = G_d^\wedge$. Por tanto, por la proposición 3.1, $G^\wedge = \overline{G^\wedge} = Hom_\pi(G, \mathbb{T})$. □

En esta sección, dado un grupo topológico G, se pretende estudiar el encaje de $\mathcal{C}Hom(G, \mathbb{T})$ en $Hom(G, \mathbb{T})$ y averiguar como es de "grande" (desde el punto de vista de las categorías de Baire) $G^\wedge$ dentro de $Hom(G, \mathbb{T})$. Posteriormente, se particulariza a los casos en que G sea el grupo de los racionales dotado, en un primer momento, de la topología usual y de la topología de Bohr inducida por la misma y, después, de la topología p-ádica y de la topología de Bohr inducida.

Se introducen a continuación algunos conceptos relacionados con las categorías de Baire. Un conjunto A es *casi-abierto* (o *tiene la propiedad de Baire*) si se puede representar como $A = U \triangle P = (U \cup P) \setminus (U \cap P)$ con U abierto y P de primera categoría. Obviamente, todo conjunto abierto es casi-abierto. Además, como los casi-abiertos forman una σ-álgebra (ver [9, Teorema 4.3, p. 19]), los cerrados y los conjuntos F_σ son casi-abiertos.

Proposición 3.3 *Sea G un grupo topológico. Si H es un subgrupo casi-abierto de segunda categoría de G, entonces H es abierto y cerrado.*

Demostración: Como H es un casi-abierto de segunda categoría, por el teorema de Banach-Kuratowski-Pettis [10, Teorema 1, p. 295], $HH^{-1} = H$ es un entorno de la identidad. Por tanto $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, lo que implica que H es abierto y cerrado. □

Proposición 3.4 *Si G es un grupo topológico metrizable, entonces $G^\wedge$ es casi-abierto en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$.*

Demostración: Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de 0. Se comprueba directamente la igualdad

$$G^\wedge = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^\triangleright$$

donde $U_n^\triangleright = \{\chi \in G^\wedge : \mathrm{Re}\chi(U_n) \geq 0\}$ es el polar de U_n. Se puede ver que $U_n^\triangleright$ es cerrado en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $G^\wedge = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n^\triangleright$ es casi-abierto en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$. □

Corolario 3.5 *Si G es un grupo topológico metrizable y $G^\wedge$ es de segunda categoría en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$, entonces $G^\wedge$ es abierto y cerrado en $Hom_\pi(G, \mathbb{T})$.*

Demostración: Se sigue de las proposiciones 3.3 y 3.4. □

Corolario 3.6 *Si G es un grupo topológico metrizable y $G^\wedge$ separa puntos de G y es de segunda categoría en $Hom_\pi(G,\mathbb{T})$, entonces $G^\wedge = Hom_\pi(G,\mathbb{T})$.*
Demostración: Se sigue de los corolarios 3.2 y 3.5. □

Corolario 3.7 *Si G es un grupo topológico metrizable, $G^\wedge$ separa puntos de G y $G^\wedge \subsetneq Hom_\pi(G,\mathbb{T})$, entonces $G^\wedge$ es de primera categoría en $Hom_\pi(G,\mathbb{T})$*
Demostración: Si $G^\wedge$ fuera de segunda categoría en $Hom_\pi(G,\mathbb{T})$, por el corolario 3.6, $G^\wedge = Hom_\pi(G,\mathbb{T})$. □

Para poder aplicar este resultado a los grupos estudiados es necesario demostrar que, en todos ellos, el dual es un subgrupo propio del grupo de caracteres. Para ello se construyen, en cada caso, caracteres no continuos.

$\mathcal{C}Hom(\mathbb{Q}_u,\mathbb{T}) \neq Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$

Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $z_n = e^{2\pi i\theta_n}$ con

$$\theta_n = \frac{1}{2(n!)} + \frac{1}{n!}\left(\sum_{l=2}^{n} \mathrm{Ent}\left[\frac{l}{2}\right](l-1)!\right)$$

donde $\mathrm{Ent}[x]$ expresa la parte entera de $x \in \mathbb{R}$.
Obviamente, para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $z_n \in \mathbb{T}$ y, como $\theta_n = \dfrac{\theta_{n-1} + \mathrm{Ent}\left[\frac{n}{2}\right]}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, se puede probar que $z_n^n = z_{n-1}$. Además se puede comprobar por inducción que, para todo $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\frac{1}{4} \leq \theta_n \leq \frac{3}{4}$, es decir, $z_n \notin R_{\frac{1}{4}}$.
Asi pues,

$$\begin{aligned} \chi_{\boldsymbol{z}} : \mathbb{Q}_u &\to \mathbb{T} \\ \frac{m}{n} &\mapsto z_n^{m(n-1)!} = e^{2\pi i m(n-1)!\theta_n} = e^{2\pi i\frac{m}{n}\left(\frac{1}{2}+\left(\sum_{l=2}^{n}\mathrm{Ent}\left[\frac{l}{2}\right](l-1)!\right)\right)} \end{aligned}$$

es un homomorfismo y, sin embargo, no es continuo, ya que $\chi_{\boldsymbol{z}}\left(\frac{1}{n!}\right)$ no converge a 1.

Proposición 3.8 *$\mathbb{Q}_u^\wedge$ es de primera categoría en $Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.*
Demostración: El dual de $\mathbb{Q}_u$ es precisamente $\mathbb{R}_u$. Como $\mathbb{R}_u$ es LCA, su dual separa sus puntos y, en particular, separa puntos de $\mathbb{Q}_u$. Por tanto el dual de los racionales con la topología usual separa puntos.
Así pues, ya que $\mathbb{Q}_u$ es un grupo topológico metrizable y $\mathbb{Q}_u^\wedge \subsetneq Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$, por el corolario 3.7, se tiene el resultado. □

Corolario 3.9 *$(\mathbb{Q}_u)_\sigma^\wedge$ es de primera categoría en $Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.*
Demostración: Basta observar que, por el corolario 2.11, $(\mathbb{Q}_u)_\sigma^\wedge \cong \mathbb{Q}^\wedge$ y el resultado se sigue de la proposición 3.8. □

$\mathcal{C}Hom((\mathbb{Q},\tau_p),\mathbb{T}) \neq Hom(\mathbb{Q},\mathbb{T})$

Dado $p\in\mathbb{P}$, consideramos el siguiente homomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} \chi_{\boldsymbol{p}}:(\mathbb{Q},\tau_p) & \to & \mathbb{T} \\ \frac{m}{n} & \mapsto & e^{2\pi i \frac{m}{n}\frac{1}{p+1}} \end{array}$$

En $(\mathbb{Q},\tau_p)$ consideramos la sucesión $(p^n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, que tiende a 0. Para cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, se tiene que $\chi_{\boldsymbol{p}}(p^n)=e^{2\pi i p^n\frac{1}{p+1}}=e^{2\pi i\frac{p^n}{p+1}}$.

Ahora bien, como, para cada $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $p+1\nmid p^n$, se tiene que para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ existe $k_n\in\{1,\dots,p\}$ tal que $p^n\equiv k_n \pmod{p+1}$.

Así pues, $\chi_{\boldsymbol{p}}(p^n)=e^{2\pi i\frac{p^n}{p+1}}=e^{2\pi i\frac{k_n}{p+1}}\notin R_{\frac{1}{p+1}}$, es decir, $\chi_{\boldsymbol{p}}(p^n)$ no converge a $1=\chi_{\boldsymbol{p}}(0)$ y por tanto $\chi_{\boldsymbol{p}}$ no es continuo.

Proposición 3.10 $(\mathbb{Q},\tau_p)^\wedge$ *es de primera categoría en* $Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.

Demostración: Como $\mathbb{Q}_p$ es LCA, su dual separa sus puntos y, en particular, separa puntos de $(\mathbb{Q},\tau_p)$. Además $\mathbb{Q}_p$ es precisamente el dual de $(\mathbb{Q},\tau_p)$, por tanto el dual de los racionales con la topología p-ádica separa puntos.

Así pues, ya que $(\mathbb{Q},\tau_p)$ es un grupo topológico metrizable y $(\mathbb{Q},\tau_p)^\wedge \subsetneq Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$, por el corolario 3.7, se tiene el resultado. □

Corolario 3.11 $(\mathbb{Q},\tau_p)^\wedge_\sigma$ *es de primera categoría en* $Hom_\pi(\mathbb{Q},\mathbb{T})$.

Demostración: Basta observar que, por el corolario 2.11, $(\mathbb{Q},\tau_p)^\wedge_\sigma\cong(\mathbb{Q},\tau_p)^\wedge$ y el resultado se sigue de la proposición 3.10. □

Agradecimientos.

La autora se encuentra en deuda con V. Tarieladze por sus útiles sugerencias y recomendaciones.

Referencias

[1] W. Banaszczyk, *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces*, Lecture Notes in Math., no. 1466, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[2] W. Banaszczyk and E. Martín-Peinador, *The Glicksberg theorem on weakly compact sets for nuclear groups*, Papers on General Topology and Applications, Ann. NY. Acad. Sci. **788** (1996), 34–39.

[3] M.J. Chasco, *Pontryagin duality for metrizable groups*, Arch. Math. **70** (1998), 22–28.

[4] W.W. Comfort, S. Hernández, and F.J. Trigos-Arrieta, *Relating a locally compact abelian group to its Bohr compactification*, Advances in Mathematics **120** (1996), no. 2, 322–344.

[5] I. Glicksberg, *Uniform boundedness for groups*, Canad. J. Math. **14** (1962), 269–276.

[6] H. Hasse, *Number Theory*, Grundlehren Math. Wiss. [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 229, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[7] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, vol. I, Springer-Verlag, 1963.

[8] S.A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 29, Cambridge University Press, 1977.

[9] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, second ed., Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[10] J. Pettis, *On continuity and openness of homomorphisms in topological groups*, Ann. of Math. **52** (1950), no. 2, 293–308.

[11] S.U. Raczkowski-Trigos, *Totally bounded groups*, Ph.D. thesis, Wesleyan University, 1999.