Un Ensayo Encaminado a Resolver un Problema en la Doctrina del Azar

de
Thomas Bayes

TRADUCCIÓN

Coordinador
Francisco Javier Girón González-Torre

Traductores
Miguel Ángel Gómez Villegas
Francisco Javier Girón González-Torre
María Lina Martínez García
David Ríos Insua

Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp),
Vol. 95, N.os 1–2, pp 63–80, 2001
Monográfico: Conmemoraciones Matemáticas: Tricentenario de Thomas Bayes

UN ENSAYO ENCAMINADO A RESOLVER UN PROBLEMA EN LA DOCTRINA DEL AZAR

por el difunto Sr. Bayes, F. R. S. comunicado por el Sr. Price en una carta a John Canton, A.M. & F. R. S. Leído el 23 de Diciembre de 1763.

THOMAS BAYES *

* Miembro de la Royal Society

Querido Sr.:

Le envío un Ensayo que he encontrado entre los papeles de nuestro desaparecido amigo el Sr. Bayes, y que, en mi opinión, tiene un gran mérito y merece ser conservado. La filosofía experimental, como estará usted de acuerdo, está muy interesada en los temas tratados en el Ensayo y por este motivo pienso que no es inapropiado presentar esta comunicación a la Royal Society.

Como usted sabe, el Sr. Bayes tuvo el honor de ser un miembro de esta ilustre Sociedad y es muy apreciado por muchos miembros de la misma como un hábil matemático. En una introducción que él ha escrito a este Ensayo dice que pensó en este tema para encontrar un método que permitiera establecer resultados acerca de la probabilidad que tiene de ocurrir un suceso, en determinadas circunstancias, bajo la suposición de que no sabemos nada sobre él salvo que ha ocurrido un número de veces y dejado de ocurrir otro cierto número de veces. Añade que pronto se dio cuenta de que esto no sería muy difícil de hacer, supuesto que se pudiera, y que se podría dar alguna regla para determinar la probabilidad de que la probabilidad de la ocurrencia de un suceso perfectamente desconocido esté entre dos valores dados, antes de que se haya realizado ningún experimento acerca del suceso; y que él opinaba que la regla debiera ser suponer equiprobabilidad para todos los valores posibles. Añadía que, una vez admitido esto, todo lo demás podía ser calculado fácilmente con los procedimientos usuales de la doctrina del azar. En esta línea he encontrado entre sus papeles una solución muy ingeniosa del problema. Pero más adelante advierte que el postulado en que se basa podría no ser admitido por todos como razonable y, por lo tanto, ha preferido fundamentar de otra forma la proposición que incluye la solución del problema y, en un escolio, explicar sus razones para pensar así y no llevar al razonamiento matemático algo que pudiera ser discutible. Éste, como usted podrá observar, es el método que se ha seguido en este Ensayo.

Toda persona juiciosa se dará cuenta de que el problema tratado no es una mera especulación de la doctrina del azar, sino que es necesario resolverlo para [dotar] de un fundamento seguro a nuestros razonamientos relativos a los hechos pasados que verosímilmente pueden volver a ocurrir. El sentido común es de hecho suficiente para hacernos ver que, de la observación de lo que en ocasiones anteriores han sido las consecuencias de una cierta causa o acción, uno puede hacer un juicio sobre cuál va a ser verosímilmente la consecuencia de la causa en otro ocasión, y que cuanto mayor sea el número de experimentos que tengamos para apoyar una conclusión, mayor razón habrá para aceptar la conclusión. Sin embargo es cierto que no podemos garantizar, al menos con total precisión, en qué grado la repetición de experimentos confirma una conclusión, sin la discusión particular del problema anteriormente mencionado; el cuál, por lo tanto, debe ser considerado por cualquiera que quiera aclarar el significado del *razonamiento inductivo o analógico*. Con referencia al presente vemos que el conocer un poco más hace que unas veces quedemos convencidos, mientras que otras veces no; y esto nos permitirá adquirir certezas que de otra manera ignoraríamos, de manera que con toda probabilidad esto evitaría el que cometiéramos determinados errores, si comprendiéramos la fuerza que tiene este tipo de razonamiento que nos permite una mejor comprensión.

Estas observaciones demuestran que el problema que se va a resolver en este Ensayo es importante y no una mera curiosidad. Puede añadirse con seguridad, que es también un problema que nunca antes había sido resuelto. De Moivre, de hecho, el gran impulsor de esta parte de las matemáticas, es quién en sus *Leyes de Azar* *,

* Véase la *Doctrina del Azar* del Sr. De Moivre, p. 243, etc. Ha

siguiendo a Bernoulli, y con un mayor grado de exactitud, ha dado reglas para encontrar la probabilidad de que si se ha sido realizado un gran número de pruebas referentes a la observación de un suceso, la proporción entre el número de veces en que ocurrirá y el número de veces en que no ocurrirá debe diferir de la proporción de la probabilidad de su ocurrencia a la de su fallo en un único experimento menos que un pequeño límite asignado. Pero yo no conozco que nadie haya resuelto el problema inverso a éste, a saber: *Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y [el número de veces que] no ha ocurrido, encontrar la probabilidad de que la probabilidad de que se presente esté entre dos límites prefijados.* Lo que el Sr. De Moivre ha hecho no se puede considerar suficiente para que sea innecesario considerar el resultado que ofrecemos, especialmente cuando las reglas que él ha dado no pretenden ser rigurosamente exactas, salvo cuando el número de repeticiones se hace infinito; de donde resulta que no es obvio saber cuál debe ser el número de experimentos que hay que realizar para obtener resultados con suficiente exactitud en la práctica.

El Sr. De Moivre llama al problema que él ha resuelto el más dificil que puede ser propuesto sobre el tema de la probabilidad. Ha aplicado su solución a temas muy importantes y por lo tanto ha demostrado que aquellos que han insinuado que la doctrina del azar en matemáticas tiene consecuencias triviales están equivocados, y no puede tener lugar alguno en una investigación seria *. Mi propósito es poner de manifiesto las razones que tenemos para creer que en la constitución de las cosas hay leyes deterministas de acuerdo con las cuales ocurren los sucesos, y que, por lo tanto, la concepción del mundo debe ser el efecto de la sabiduría y el poder de una causa inteligente; y confirmar así el argumento basado en la causa final que prueba la existencia de Dios. Será fácil ver que el problema inverso resuelto en este Ensayo es más aplicable a este propósito; veremos, con claridad y precisión, que en cualquier situación de sucesos concurrentes hay razones para pensar que tal ocurrencia u orden se sigue de causas estables o leyes naturales y no de las irregularidades del azar.

Las dos últimas reglas de este Ensayo están expuestas sin demostración. He preferido hacerlo así, debido a que su deducción ocupa demasiado espacio y alargaría el mismo innecesariamente, y también porque estas reglas, aunque son muy útiles, no responden al objetivo para el que se han propuesto de modo tan perfecto como uno desearía. Sin embargo, son fáciles de reproducir, si se considerase oportuno incluirlas en el texto. En algunos lugares del Ensayo he incluido notas cortas y he añadido una aplicación de las reglas a algunos casos particulares, con la finalidad de transmitir una idea más clara de la naturaleza del problema y para mostrar hasta donde se puede llegar en la resolución del mismo.

Me doy cuenta de que le he robado mucho tiempo, por lo que razonablemente no puedo esperar que analice con minuciosidad cada detalle de lo que yo le envío. Algunos cálculos, particularmente del Apéndice, no se pueden obtener sin un buena dosis de trabajo. He sido muy cuidadoso en este aspecto y creo que no contienen ningún error; pero si hubiera alguno, soy yo el único responsable.

El Sr. Bayes había creído pertinente comenzar el Ensayo con una breve exposición de las leyes de la probabilidad. La razón para hacerlo así, como él dice en la introducción, no fue sólo ahorrar al lector la molestia de encontrar los principios en los que él se basa, sino también porque no sabía como referirse a ellos para una demostración clara de los mismos. El Sr. Bayes también se excusa por la peculiar definición que él da de la palabra *azar* o *probabilidad*. Su objetivo con respecto a esto último era acabar con las disputas entre los distintos significados de la palabra probabilidad, que se utilizan en el lenguaje ordinario con diferentes sentidos por personas de opiniones diferentes, y según se aplique a hechos *pasados* o *futuros*. Pero por muy diferentes que sean los significados que pueda tener la palabra probabilidad, todos (observa) se refieren a una esperanza que dependería de la certeza de cualquier hecho *pasado*, o de la ocurrencia de cualquier suceso *futuro*, que debería ser estimada por un valor mayor en tanto en cuanto el suceso fuera percibido como más cierto o su ocurrencia más verosímil. En lugar de lo anterior, sobre el sentido adecuado de la palabra *probabilidad*, él da el procedimiento que permite medirla de modo correcto cada vez que se use esta palabra. Pero ya es tiempo de concluir esta carta. La filosofía experimental está en deuda con usted por sus descubrimientos y demostraciones, y, por consiguiente, no puedo menos que pensar que es del todo acertado enviarle a usted el siguiente Ensayo y Apéndice.

Que sus investigaciones sean recompensadas con los mayores éxitos, y que pueda usted disfrutar de todas las bendiciones, es, Señor, el deseo sincero de

su más humilde servidor

RICHARD PRICE

Newington-Green,
10 *November* 1763

---

omitido las demostraciones de sus reglas pero, con posterioridad, el Sr. Simpson las ha proporcionado al final de su tratado sobre *La Naturaleza y Leyes del Azar*.

* Véase su *Doctrina del Azar*, p. 252, etc.

PROBLEMA

Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y el de veces que no ha ocurrido, se requiere *calcular* la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre cualesquiera dos valores prefijados.

SECCIÓN I

Definición

1. Varios sucesos son *inconsistentes*, cuando si uno de ellos ocurre, no puede ocurrir ninguno de los restantes.
2. Dos sucesos son *contrarios* cuando uno u otro de ellos debe ocurrir y ambos juntos no pueden ocurrir.
3. Un suceso se dice que *falla* cuando no ocurre o, lo que es lo mismo, cuando su contrario ha ocurrido.
4. Un suceso se dice *determinado* * cuando o bien ha ocurrido o bien ha fallado.
5. La *probabilidad de cualquier suceso* es el cociente entre el valor de la esperanza del suceso que debe ser calculada dependiendo de su ocurrencia, y el valor de la esperanza una vez que ha ocurrido.
6. Por *azar* se entiende lo mismo que por *probabilidad* *.
7. Varios sucesos son *independientes* * cuando la ocurrencia de cualquiera de ellos no aumenta ni disminuye la probabilidad de los restantes.

Proposición 1

Cuando varios sucesos son inconsistentes, la probabilidad de la ocurrencia de uno cualquiera de ellos, es la suma de las probabilidades de cada uno.

Supongamos que hay tres sucesos, y que si cualquiera de ellos ocurre yo recibo N, y las probabilidades del primero, segundo y tercero son a/N, b/N y c/N, respectivamente. Entonces (por la definición de probabilidad) el valor de mi esperanza para el primer suceso será a, para el segundo será b y para el tercero será c. Por lo tanto, el valor de mi esperanza de los tres juntos será $a+b+c$. Pero la suma de mis esperanzas de los tres sucesos es, en este caso, la esperanza de recibir N supuesto que ha ocurrido alguno de ellos. Por lo tanto, (por la definición 5), la probabilidad de ocurrencia de uno cualquiera de ellos es $(a+b+c)/N$ o $a/N + b/N + c/N$, la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Corolario

Si es seguro que alguno de los tres sucesos debe ocurrir, entonces $a+b+c = N$. Ya que en este caso todas las esperanzas juntas ascienden a una cierta cantidad esperada de recibir N, sus valores sumados deben ser iguales a N. De aquí está claro que la probabilidad de un suceso sumada a la probabilidad de su fallo (o de su contrario) es un cociente igual a la unidad. Como estos son sucesos inconsistentes, uno de ellos necesariamente debe ocurrir. Por lo tanto, si la probabilidad de un suceso es P/N la de su fallo será $(N-P)/N$.

Proposición 2

Si una persona tiene una esperanza que depende de la ocurrencia de un suceso, la probabilidad del suceso es a la probabilidad de su fallo, como la pérdida —si el suceso falla— es a la ganancia —si el suceso ocurre.

Supongamos que una persona tiene la esperanza de recibir N, dependiendo de un suceso cuya probabilidad es P/N. Entonces, (de la definición 5), el valor de su esperanza es P y, por lo tanto, si el suceso falla pierde algo cuyo valor es P y si ocurre recibe N, pero su esperanza acaba. Su ganancia es, por consiguiente, $N - P$. Del mismo modo, como la probabilidad del suceso es P/N, la de su fallo, (por el corolario de la proposición 1), es $(N-P)/N$. Pero P/N es a $N - P/N$ como P es a $N - P$, es decir, la probabilidad del suceso es a la probabilidad de su fallo, como su pérdida —si el suceso falla— es a su ganancia —si el suceso ocurre.

Proposición 3

La probabilidad de que dos sucesos consecutivos ocurran es el cociente que resulta de multiplicar la probabilidad del primero y la probabilidad del segundo bajo la suposición de que ocurra el primero.

Supongamos que, si ambos sucesos ocurren, yo recibo N, que la probabilidad de que ambos sucesos ocurran es P/N, que la probabilidad del primero es a/N (y consecuentemente la de que no ocurra es $(N-a)/N$) y que la probabilidad de que el segundo ocurra bajo la suposición de que lo hace el primero es b/N. Entonces, (de la definición 5), P será el valor de mi esperanza, que se convertirá en b si el suceso primero ocurre. Consecuentemente, si el suceso primero ocurre, mi ganancia es $b - P$, y si falla mi pérdida es P. De donde, por la proposición anterior, a/N es a $(N - a)/N$, es decir, a es a $N-a$, como P es a $b-P$. De donde, (*componendo*

* N.C.T. [no aparece en cursiva en el texto original]

inverse), a es a N como P es a b. Pero el cociente entre P y N es el producto de la razón entre P y b, y de la razón entre b y N. Por lo tanto, el mismo cociente entre P y N es el producto de la razones entre a y N y entre b y N; es decir, la probabilidad de que los dos sucesos consecutivos ocurran, es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo bajo la suposición de que el primero ocurra.

Corolario

Por tanto si, de dos sucesos consecutivos, la probabilidad del primero es a/N y la probabilidad de ambos juntos es P/N, entonces, la probabilidad del segundo bajo la suposición de que el primero ocurra es P/a.

Proposición 4

Si dos sucesos consecutivos se observan todos los días, y cada día la probabilidad del segundo es b/N y la probabilidad de ambos es P/N, y yo recibo N si ambos sucesos ocurren el primer día en el cuál el segundo suceso ocurre, entonces digo, de acuerdo con estas condiciones, que la probabilidad de obtener N es P/b. Porque, si no fuera así, sea x/N la probabilidad de obtener N y sea y tal que la razón de y a x es como la de $N-b$ a N. Entonces, ya que x/N es la probabilidad de obtener N (por la definición 1), x es el valor de mi esperanza. Y, de nuevo, por las condiciones anteriores, el primer día tengo una esperanza de obtener N que depende de la ocurrencia de ambos sucesos juntos, cuya probabilidad es P/N, y el valor de esta esperanza es P. Del mismo modo, si esta coincidencia no ocurriera tendría una esperanza de volver a mis circunstancias iniciales, es decir, de recibir el valor x dependiendo del fallo del segundo suceso cuya probabilidad (por el corolario de la proposición 1) es $(N-b)/N$ o y/x, ya que y es a x como $N-b$ es a N. Por lo tanto, como x es la esperanza e y/x la probabilidad de obtenerla, el valor de esta esperanza es y. Pero estas dos últimas esperanzas juntas, son evidentemente la misma que mi esperanza original, cuyo valor es x, y por lo tanto $P+y=x$. Pero y es a x como $N-b$ es a N. Por lo tanto, x es a P como N es a b, y x/N (la probabilidad de obtener N) es igual a P/b.

Corolario

Supongamos que después de la esperanza que recibo en la proposición anterior, y antes de que se sepa si el primer suceso ha ocurrido o no, yo supiera que el segundo suceso ha ocurrido; de aquí, únicamente puedo inferir que el suceso está determinado en cuanto a mi esperanza depende, y no tengo razón para estimar que el valor de mi esperanza sea mayor o menor que lo que valiera antes. Porque si tengo motivos para pensar que es menor, sería razonable para mí dar algo a cambio de volver a mis circunstancias anteriores, y esto ocurriría una vez tras otra tantas veces como fuera informado de la ocurrencia del segundo suceso, lo cuál es evidentemente absurdo. Igual de absurdo sería, si dijéramos que yo debería poner una cantidad para hacer mayor mi esperanza, ya que entonces sería razonable que rechazara algo que se me ofreciera bajo la condición de que renunciase, y así volver a la situación anterior; y esto ocurriría una vez tras otra mientras se supiese que el segundo suceso ha ocurrido (sin conocer nada acerca del primer suceso).

Por consiguiente, a pesar de que se hubiera descubierto que el segundo suceso ha ocurrido, el valor de mi esperanza debería ser el mismo que antes, es decir, x, y consecuentemente la probabilidad de obtener N seguiría siendo (por la definición 5) x/N o P/b. *

Pero tras descubrir esto, la probabilidad que tengo de obtener N es la probabilidad de que el primero de estos dos sucesos consecutivos haya ocurrido bajo la suposición de que el segundo ya lo haya hecho, probabilidades que ya se establecieron antes. Pero la probabilidad de que un suceso haya ocurrido es la misma que la probabilidad que yo tengo de apostar correctamente si apuesto que ha ocurrido. Por lo tanto la siguiente proposición es evidente.

Proposición 5

Si hay dos sucesos consecutivos, de modo que la probabilidad del segundo es b/N y la de los dos juntos P/N, y se descubre primero que el segundo suceso ha ocurrido, de lo que deduzco que el primer suceso también ha ocurrido, la probabilidad de que esté en lo cierto es P/b. †

* Lo que aquí se dice puede quizás ilustrarse, considerando que todo lo que se puede perder por la ocurrencia del segundo suceso es la probabilidad que yo tendría de volver a mis primeras circunstancias, si el suceso del que depende mi esperanza hubiera sido determinado en la forma expresada en la proposición. Pero esta probabilidad está siempre bien *en contra* mía o a *favor* mío. Si el primer suceso ocurre, está *en contra* mía, y es igual a la probabilidad de que el segundo suceso no ocurra. Si el primer suceso no ocurre, está a *favor* mío, y es igual también a la probabilidad de que el segundo suceso no ocurra. Por consiguiente, la pérdida por esto no puede suponer una desventaja.

† Lo que el Sr. Bayes demuestra en ésta y en la proposición precedente es lo mismo que la respuesta a la siguiente pregunta. ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto suceso, cuando ocurre, estará acompañado por otro que se determinará al mismo tiempo? En este caso, cuando uno de los dos sucesos está dado, nada puede deberse a su esperanza; y, consecuentemente, el valor de una esperanza que depende de la ocurrencia de ambos sucesos debe ser la misma que el valor de una esperanza que depende de la ocurrencia de uno de ellos. En otras palabras: la probabilidad de que, cuando uno de los dos sucesos ocurre, el otro también ocurrirá, es la misma que la probabilidad de éste. Llamemos entonces x a la probabilidad de éste último, y si b/N es la probabilidad del suceso dado, y p/N la probabilidad de ambos, ya que $p/N = (b/N) \times x$, entones $x = p/b$ = la probabilidad mencionada en estas proposiciones.

Proposición 6

La probabilidad de que ocurran varios sucesos independientes es una razón o cociente calculado como el producto de las probabilidades de cada uno.

Pues por la propia naturaleza de los sucesos independientes, la probabilidad de que uno de ellos ocurra no se ve alterada por la ocurrencia o no del resto y, consecuentemente, la probabilidad de que el segundo suceso ocurra supuesto que el primero haya ocurrido es la misma que la de su probabilidad original; pero la probabilidad de que cualesquiera dos sucesos ocurran es el cociente calculado multiplicando la probabilidad del primero y la probabilidad del segundo bajo la hipótesis de que el primero ocurre, por la proposición 3. Por consiguiente, la probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes cualesquiera es la razón calculada multiplicando la probabilidad del primero por la probabilidad del segundo. Y, de modo análogo, considerando el primero y el segundo sucesos juntos como un solo suceso, la probabilidad de que tres sucesos independientes ocurran es la razón calculada multiplicando la probabilidad de que los dos primeros ocurran por la probabilidad del tercero. Y así se puede proceder si hubiera más sucesos; de donde la proposición queda manifiesta.

Corolario 1

Si hay varios sucesos independientes, la probabilidad de que el primero ocurra y el segundo no ocurra, el tercero no ocurra y el cuarto ocurra, etc. es el cociente calculado multiplicando la probabilidad del primero, por la probabilidad de que no ocurra el segundo, por la probabilidad de que no ocurra el tercero, por la probabilidad del cuarto, etc. Pues la no ocurrencia de un suceso siempre puede considerarse como la ocurrencia de su contrario.

Corolario 2

Si hay varios sucesos independientes, y la probabilidad de cada uno de ellos es a, y la de que no ocurra es b, la probabilidad de que el primero ocurra y el segundo no ocurra, y el tercero no ocurra y el cuarto ocurra, etc. será $abba$, etc. Pues, de acuerdo con la notación algebraica, si a representa cualquier cociente y b cualquier otro, $abba$ representa el cociente calculado multiplicando los cocientes a, b, b, a. Este corolario es, por consiguiente, un caso particular del anterior.

Definición

Si como consecuencia de ciertos datos existe una probabilidad de que un cierto suceso pueda ocurrir, su ocurrencia o no, como consecuencia de estos datos, lo llamo ocurrencia o no ocurrencia de la primera prueba. Y si se repiten los mismos datos otra vez, la ocurrencia o no del suceso, como consecuencia de ellos, lo llamo ocurrencia o no ocurrencia de la segunda prueba; y así sucesivamente, en tanto en cuanto se repitan los mismos datos. Y, por lo tanto, es manifiesto que la ocurrencia o no del mismo suceso en tantas pruebas diferentes, es en realidad la ocurrencia o no ocurrencia de tantos sucesos independientes y distintos exactamente iguales entre sí.

Proposición 7

Si la probabilidad de un suceso es a, y la de su no ocurrencia es b en cada una de las pruebas individuales, la probabilidad de que ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas es Ea^pb^q si E es el coeficiente del término en el que aparece a^pb^q cuando se desarrolla el binomio $(a+b)^{p+q}$.

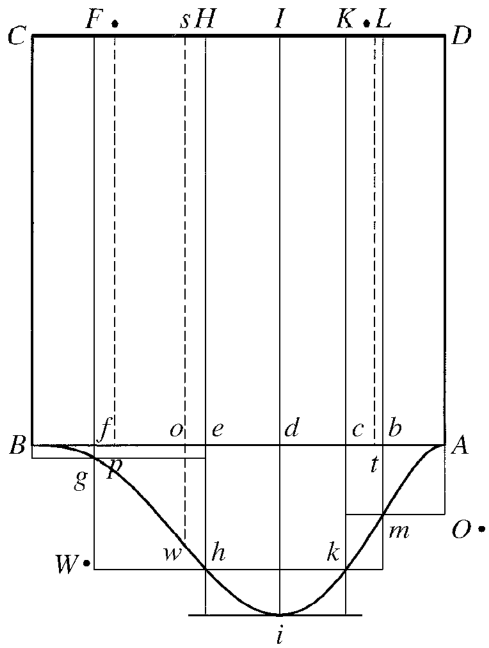
Porque la ocurrencia o no de un suceso en pruebas distintas son sucesos independientes. Por consiguiente, (por el corolario 2 de la proposición 6) la probabilidad de que el suceso ocurra en la primera prueba, no ocurra en la segunda ni en la tercera, y ocurra en la cuarta, y no ocurra en la quinta, etc. (de tal modo que ocurrencias y no ocurrencias aparezcan hasta que el número de ocurrencias sea p y el de no ocurrencias q) es $abbab$, etc. hasta que el número de *aes* sea p y el de *bes* sea q, es decir, es a^pb^q. Del mismo modo, si se considera que el suceso ocurre p veces y no ocurre q veces en otro orden particular, su probabilidad es a^pb^q; pero el número de órdenes diferentes en los que un suceso puede ocurrir o no, de modo que ocurra p veces y no ocurra q veces, en $p+q$ pruebas es igual al número de permutaciones que $aaaa\ bbb$ admite cuando el número de *aes* es p, y el número de *bes* es q. Y este número es igual a E, el coeficiente del término en el que aparece a^pb^q cuando se desarrolla $(a+b)^{p+q}$. El suceso, por lo tanto, puede ocurrir p veces y no ocurrir q veces en $p+q$ pruebas en E diferentes modos y no más, y su ocurrencia o no de todos estos diferentes modos son sucesos inconsistentes, la probabilidad de cada uno de ellos es a^pb^q, y por consiguiente, por la proposición 1, la probabilidad de que, de un modo u otro, ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas es Ea^pb^q.

SECCIÓN II

Postulado

1. Supongo que la tabla cuadrada o plano $ABCD$ está de tal forma construida o nivelada que si alguna de las bolas O o W se lanza habrá la misma probabilidad de que se pare sobre cualquier parte del plano, y que debe pararse necesariamente sobre algún lugar de él.

2. Supongo que la bola W se lanza primero, y que, a través del punto donde se para, se dibuja una línea os paralela a AD, de modo que corta a CD y AB en s y o; y que a continuación la bola O se lanza $p+q$ o n veces, y que al suceso de pararse entre AD y os se le denomina la ocurrencia del suceso M en una sola prueba. Supuesto lo anterior:



Lema 1

La probabilidad de que un punto o caiga entre dos puntos cualesquiera de la línea AB es la razón de las distancia entre los dos puntos y la longitud de toda la línea AB.

Sean f y b dos puntos cualesquiera de la línea AB, y a través de ellos se trazan fF, bL, paralelas a AD que cortan a CD en F y L. Entonces, si los rectángulos Cf, Fb, LA son comensurables entre sí, pueden dividirse en partes iguales, lo cual una vez hecho, y lanzada la bola W, la probabilidad de que pare sobre cualquier número de estas partes iguales será la suma de las probabilidades de que pare sobre cada una de ellas, ya que los sucesos de quela bola pare sobre cada una de las diferentes partes del plano AC son inconsistentes; y su suma —ya que la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales es la misma—, es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes. En consecuencia, la probabilidad de que la bola W pare sobre el [cuadrado] Fb es la probabilidad de que pare sobre cualquiera de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de Fb; y la probabilidad de que pare en algún sitio entre Cf o LA, es decir, de que no pare sobre FB (ya que debe parar en algún lugar sobre AC) es la probabilidad de que pare sobre una de las partes iguales multiplicada por el número de partes iguales de Cf, LA tomadas conjuntamente. De donde se sigue que la probabilidad de que [la bola] pare sobre Fb es a la probabilidad de que no pare sobre Fb como el número de partes iguales de Fb es al número de partes iguales de Cf, LA en conjunto, o como Fb es a Cf, LA en conjunto, o como fb es a Bf, Ab juntos. De donde la probabilidad de que pare sobre Fb es a la probabilidad de que no pare sobre Fb como fb es a Bf, Ab juntos. Y (*componendo inverse*) la probabilidad de que pare sobre Fb es a la probabilidad de que pare sobre Fb sumada a la probabilidad de que no pare sobre Fb como fb es a AB, o como la razón entre fb y AB es a la razón entre AB y AB. Pero la probabilidad de cualquier suceso sumada a la del suceso contrario es igual a la unidad; de donde la probabilidad de que la bola pare sobre Fb es a la unidad como el cociente entre fb y AB es al cociente entre AB y AB, o sea la unidad; y por tanto la probabilidad de que la bola pare sobre Fb es el cociente entre fb y AB. Pero *ex hypothesi* según la bola W pare o no sobre Fb, el punto o estará o no entre f y b y, por consiguiente, la probabilidad de que el punto o esté entre f y b es el cociente entre fb y AB.

Sin embargo, si los rectángulos Cf, Fb, LA no son comensurables, la última probabilidad mencionada no puede ser ni mayor ni menor que la razón de fb a AB; pues, si fuese menor, sería el cociente entre fc y AB, y sobre la línea fb se tomarían los puntos p y t de modo que pt fuese mayor que fc y las tres líneas Bp, pt, tA fuesen comensurables (lo que es evidente que siempre se puede hacer dividiendo AB en partes iguales menores que la mitad de cb, y tomando p y t los puntos de división más cercanos a f y c que están en fb). Entonces, como Bp, pt, tA son comensurables, también lo son los rectángulos Cp, Dt y el que está sobre pt completando el cuadrado AB. De donde, por lo que se ha dicho, la probabilidad de que el punto o esté comprendido entre p y t es el cociente entre pt y AB. Pero si está entre p y t debe estar entre f y b. De donde la probabilidad de que esté comprendida entre f y b no puede ser menor que la razón entre pt y AB, y por consiguiente debe ser mayor que la razón entre fc y AB (ya que pt es mayor que fc). Y ya que del mismo modo se puede probar que la antedicha probabilidad no puede ser mayor que la razón entre fb y AB, ésta debe ser igual.

Lema 2

Habiendo lanzado la bola W y dibujado la línea os, la probabilidad del suceso M en una sola prueba es la razón de Ao a AB.

Pues, del mismo modo que en el lema anterior, la probabilidad de que al lanzar la bola O ésta se pare en algún lugar sobre Do o entre AD y so es la razón entre Ao y AB. Pero el que la bola O se detenga entre AD y so tras un solo lanzamiento es la ocurrencia del suceso M en una sola prueba. Por consiguiente el lema es manifiesto.

Proposición 8

Si sobre BA se alza la figura $BghikmA$ con la siguiente propiedad, de que (la base BA está dividida en dos partes cualesquiera, como Ab y Bb, y en el punto de división b se traza una perpendicular que termina en [corta a] la figura en m; e y, x, r representan respectivamente los cocientes entre bm, Ab, Bb y BA, y E es el coeficiente del término en el que aparece $a^p b^q$ cuando se desarrolla el binomio $(a+b)^{p+q}$) $y = Ex^p r^q$, entonces digo que antes de lanzar la bola W, la probabilidad de que el punto o se encuentre entre f y b, dos puntos cualesquiera de la línea AB, suponiendo que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas, es el cociente entre $fghikmb$ —la parte de la figura $BghikmA$ intersecada por las perpendiculares fg, bm alzadas sobre la línea AB—, y CA el cuadrado sobre AB.

Demostración

Pues si así no fuera, consideremos en primer lugar el cociente entre D —una figura mayor que $fghikmb$, y CA—, y a través de los puntos e, d, c se trazan perpendiculares a fb que cortan a la curva $AmigB$ en h, i, k; el punto d es tal que di es la mayor de las longitudes de las perpendiculares comprendidas entre la recta fb y la curva $AmigB$; y los puntos e, d, c se eligen de modo que los rectángulos bk, ci, ei, fh, entre todos juntos difieran menos de $fghikmb$ que D; todo lo cual puede hacerse fácilmente con ayuda de la ecuación de la curva, suponiendo conocida la diferencia entre D y la figura $fghikmb$. Entonces, como di es la de mayor longitud de todas las ordenadas verticales con base en fb, las demás decrecerán gradualmente a medida que se alejen de ella más y más en ambos sentidos, tal como se deduce de la construcción de la figura y, en consecuencia, eh es mayor que gf o cualquier otra ordenada con base en ef.

Ahora, si Ao fuese igual a Ae, entonces por el lema 2, la probabilidad del suceso M en una sola prueba sería el cociente entre Ae y AB y, en consecuencia, por la proposición 1, la probabilidad de que no ocurriera sería el cociente entre Be y AB. Por consiguiente, si x y r son, respectivamente, los dos cocientes anteriormente mencionados, por la proposición 7, la probabilidad de que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas sería $Ex^p r^q$. Pero al ser x y r, respectivamente, los cocientes entre Ae y AB y entre Be y AB, si y es el cociente entre eh y AB, entonces, por la construcción de la figura AiB, $y = x^p r^q$. Por consiguiente, si Ao fuese igual a Ae la probabilidad de que el suceso M ocurriera p veces y no ocurriera q veces en $p+q$ pruebas sería y, o el cociente entre eh y AB. Y si Ao fuese igual a Af o estuviese entre Ae y Af, la última probabilidad mencionada, por las mismas razones, sería el cociente entre fg, o alguna otra de las ordenadas con base en ef, y AB. Pero eh es la mayor de todas las ordenadas con base en ef. Por consiguiente, bajo el supuesto de que el punto debe estar entre f y e, la probabilidad de que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas, no puede ser mayor que el cociente entre eh y AB. Existiendo, entonces, estos dos sucesos consecutivos, el primero que el punto o esté entre e y f; el segundo que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas, y que la probabilidad del primero (por el lema 1) es el cociente entre ef y AB, y sobre el supuesto de que el primero ocurra, por lo que se acaba de demostrar ahora, la probabilidad del segundo no puede ser mayor que el cociente entre eh y AB, se sigue evidentemente (de la proposición 3) que la probabilidad de que ambos ocurran no puede ser mayor que la suma del cociente entre ef y AB y del cociente entre eh y AB, cuya suma es el cociente entre fh y CA. Por consiguiente, la probabilidad de que el punto o esté entre f y g, y el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces, no es mayor que el cociente entre fh y CA. Y de la misma manera, la probabilidad de que el punto o esté entre e y d y el suceso M ocurra o no como se ha dicho anteriormente, no puede ser mayor que el cociente entre ei y CA. Y, de nuevo, la probabilidad de que el punto o esté entre d y c, y el suceso M ocurra o no como se ha dicho anteriormente, no puede ser mayor que el cociente entre ci y CA. Y, finalmente, la probabilidad de que el punto o esté entre c y b, y el suceso M ocurra o no como se ha dicho anteriormente, no puede ser mayor que el cociente entre bk y CA. Súmense ahora todas estas diversas probabilidades, y su suma (por la proposición 1) será la probabilidad de que el punto esté entre f y b, y el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas. Súmense, del mismo modo, los cocientes correspondientes todos juntos, y su suma será el cociente de la suma de los antecedentes a su consecuente común, es decir, el cociente entre fh, ei, ci, bk todos juntos y CA; cociente que es menor que el de D y CA ya que D es mayor que fh, ei, ci, bk juntos. Y, por lo tanto, la probabilidad de que el punto o esté comprendido entre f y b, y también [además (nota del autor)] que el suceso M ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ pruebas, es menor que el cociente entre D y CA; pero se supuso que era el mismo, lo cual es absurdo. Y, del mismo modo, inscribiendo rectángulos dentro de la figura, tales como eg, dh, dk, cm, se puede probar que la anteriormente mencionada probabilidad es *mayor que* el cociente entre cualquier figura menor que $fghikmb$ y CA.

Por consiguiente, la probabilidad debe ser el cociente entre $fghikmb$ y CA.

Corolario

Antes de lanzar la bola W, la probabilidad de que el punto o esté en algún lugar entre A y B, o en algún lugar sobre la línea AB, y además suponiendo que el suceso M ocurrirá p veces y no ocurrirá q veces en $p+q$ pruebas, es el cociente entre la figura AiB y CA. Pero es cierto que el punto o estará en algún lugar sobre AB. Por consiguiente, antes de lanzar la bola W la probabilidad de que el suceso M ocurrirá p veces y no ocurrirá q veces en $p+q$ pruebas, es el cociente entre AiB y CA.

Proposición 9

Si antes de que se sepa algo sobre la situación del punto o, se supiese que el suceso M ha ocurrido p veces y no ha ocurrido q veces en un total de $p+q$ pruebas, y de aquí yo opino que el punto o está entre dos puntos cualesquiera, como f y b, de la línea AB y, por consiguiente, que la probabilidad del suceso M en una sola prueba está comprendida entre los cocientes entre ab y AB y entre Af y AB; la probabilidad de que esté en lo cierto es el cociente entre la parte de la figura AiB descrita anteriormente, intersecada por las perpendiculares trazadas desde AB en los puntos f y b, y la figura completa AiB.

Pues, al haber estos dos sucesos consecutivos, el primero que el punto o esté entre f y b; el segundo que el suceso M ocurriera p veces y no ocurriera q veces en un total de $p+q$ pruebas; y (por el corolario que sigue a la proposición 8) la probabilidad original del segundo es el cociente entre AiB y CA, y (por la proposición 8) la probabilidad de ambos es el cociente entre $fghimb$ y CA; por consiguiente (por la proposición 5) habiendo descubierto primeramente que el segundo [suceso] ha ocurrido, de aquí deduzco que el primero también ha ocurrido, y la probabilidad de que estoy en lo cierto es el cociente entre $fghimb$ y AiB, que es lo que se quería probar.

Corolario

Suponiendo lo anterior, si conjeturo que la probabilidad de que el suceso M está comprendido entre 0 y el cociente entre Ab y AB, mi probabilidad de estar en lo cierto es el cociente entre Abm y AiB.

Escolio

De la proposición anterior está claro, que en el caso de un tal suceso como el que denomino M, del número de veces que ocurre y no ocurre en un cierto número de pruebas, sin saber nada más referente a él, uno puede conjeturar acerca de cual es esa probabilidad y, por los métodos usuales de cálculo de las magnitudes de las áreas mencionadas, calcular la probabilidad de que la conjetura sea cierta. Y que la misma regla es la propia [adecuada] que debe usarse en el caso de un suceso sobre el cual no conocemos absolutamente nada referente a su probabilidad, anteriormente a cualesquiera pruebas referidas a él, parece deducirse de las siguientes consideraciones; a saber, que en referencia a tal suceso no tengo razón para pensar que, en un cierto número de pruebas, un número posible de veces ocurriera más o menos que otro. Pues, sobre este supuesto, puedo justamente razonar refiriéndome a él [suceso] como si su probabilidad no se hubiese fijado al principio, y a continuación se hubiese determinado de tal manera que no me diera razón alguna para pensar que, en un cierto número de pruebas, ocurriera un número posible de veces más o menos que otro. Pero éste es exactamente el caso del suceso M. Pues antes de que se lance la bola W, lo que determina su probabilidad en una única prueba (por el corolario que sigue a la proposición 8), la probabilidad de que ocurra p veces y no ocurra q veces en $p+q$ o n pruebas es el cociente entre AiB y CA, cociente que es el mismo cuando $p+q$ o n se conoce, cualquiera que sea el número p, como se comprobará al calcular la magnitud AiB por el método de las fluxiones. * Y, consecuentemente, antes de que se sepa el lugar donde está el punto o, o el número de veces que el suceso M ha ocurrido en n pruebas, no puedo tener motivos para pensar que podría haber ocurrido un cierto número posible de veces en lugar de otro.

En lo que sigue, por consiguiente, asumiré por descontado que la regla dada referente al suceso M de la proposición 9 es también la regla que se debe usar en relación con cualquier otro suceso referente a la probabilidad de la que no se conoce nada con anterioridad a cualesquiera pruebas hechas u observadas referidas a él. Y a un tal suceso lo llamaré un suceso desconocido. [Nota del autor: El *método de las fluxiones* al que se hace referencia en este escolio es, por supuesto, el cálculo newtoniano.]

Corolario

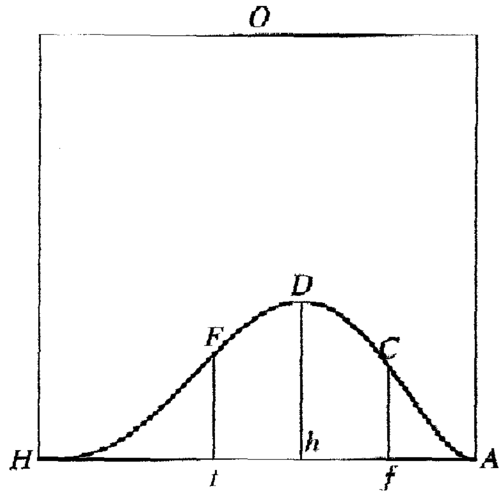
Por consiguiente, suponiendo que las ordenadas de la figura AiB se contraen según la razón entre E y 1, que no supone alteración en la proporción de las partes de la figura interceptadas entre ellas, y aplicando lo que se ha dicho del suceso M a cualquier suceso desconocido, tenemos la proposición siguiente, que da las reglas para hallar la probabilidad de un suceso a partir del número de veces que realmente ocurre y el número de veces que no ocurre.

* Se demostrará en la proposición 10 apartado 4, calculándola por el método aquí mencionado, que AiB contraída por la razón de E a 1 es a CA como 1 es a $(n+1)E$: de donde se sigue evidentemente que, antes de contraerla, AiB debe ser a CA en la razón de 1 a $n+1$, que es una razón constante cuando se conoce n, cualquiera que sea p.

Proposición 10

Si se describe una figura sobre la base AH (véase la figura) que tiene por ecuación $y = x^p r^q$, donde y, x y r son las razones entre las ordenadas de la figura alzadas en ángulo recto sobre la base del segmento de la base comprendida entre la ordenada y A, el extremo de la base, y del otro segmento de la base comprendido entre la ordenada y el punto H y la base, que es su denominador común. Entonces digo que si un suceso ha ocurrido p veces y no ha ocurrido q veces en $p+q$ pruebas, y si sobre la base AH se toman dos puntos cualesquiera f y t y se alzan en ángulo recto las ordenadas fC y tF, la probabilidad de que la probabilidad de un suceso esté comprendida entre la razón entre Af y AH y la razón entre At y AH es el cociente entre $tFCf$ —la parte de la figura anteriormente descrita comprendida entre las dos ordenadas— y $ACFH$ la figura completa con base AH.

Esto es evidente, por la proposición 9 y las observaciones hechas en el escolio y corolarios precedentes.



1. A fin de poner en práctica la regla anterior, debemos determinar el valor del área de la figura descrita y de las diversas partes que la integran delimitadas por las ordenadas perpendiculares a su base. A este fin, supongamos que $AH = 1$ y HO es el cuadrado sobre AH de modo que $HO = 1$. Sea $Cf = y$, $Af = x$ y $Hf = r$, ya que y, x y r representan las razones entre Cf, Af y Hf y AH, respectivamente. Por ser la ecuación de la curva $y = x^p r^q$ y (por ser $Af + fH = AH$) $r + x = 1$, se tiene que

$$y = x^p(1-x)^q$$
$$= x^p - qx^{p+1} + \frac{q(q-1)x^{p+2}}{2} - \frac{q(q-1)(q-2)x^{p+3}}{2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Ahora bien, si la abscisa es x y la ordenada x^p, el área correspondiente es $x^{p+1}/(p+1)$ (por la Proposición 10, cas. 1, Quadrat. Newt.) * y si la ordenada es qx^{p+1} el área es $qx^{p+2}/(p+2)$; y de forma análoga para el resto. Por consiguiente, si la abscisa es x y la ordenada y o $x^p - qx^{p+1} +$ etc., el área correspondiente es

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \frac{q(q-1)(q-2)x^{p+4}}{2\cdot 3(p+4)} + \text{etc.}$$

Por consiguiente, si $x = Af = Af/(AH)$ e $y = Cf = Cf/(AH)$, entonces

$$ACf = \frac{ACf}{HO} = \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \text{etc.}$$

De esta ecuación, si q es un número pequeño, es fácil encontrar el valor de la razón entre ACf y HO y de igual forma a como ésta se encontró, se tendrá que la razón entre HCf y HO es

$$\frac{r^{q+1}}{q+1} - \frac{pr^{q+2}}{q+2} + \frac{p(p-1)r^{q+3}}{2(q+3)} - \frac{p(p-1)(p-2)r^{q+4}}{2\cdot 3(q+4)} + \text{etc.}$$

serie que contará con menos términos y por tanto se utilizará cuando p sea pequeño.

2. Suponiendo las mismas cosas que antes, la razón entre ACf y HO es

$$\frac{x^{p+1}r^q}{p+1} + \frac{qx^{p+2}r^{q-1}}{(p+1)(p+2)} + \frac{q(q-1)x^{p+3}r^{q-2}}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

* Aquí es muy evidente, sin recurrir a Sir Isaac Newton, que al ser la fluxión del área ACf

$$y\dot{x} = x^p\dot{x} - qx^{p+1}\dot{x} + \frac{q(q-1)}{2}x^{p+2}\dot{x} - \text{etc.}$$

el fluente o área es

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \text{etc.}$$

$$+\frac{q(q-1)(q-2)x^{p+4}r^{q-3}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$$
$$+\text{ etc.} + \frac{x^{n+1}q(q-1)\cdots 1}{(n+1)(p+1)(p+2)\cdots n},$$

donde $n = p + q$, ya que esta serie es la misma que $x^{p+1}/(p+1) - qx^{p+2}/(p+2)$ + etc. que aparece en el artículo primero como valor del cociente entre ADf y HO, como se ve fácilmente sustituyendo en la primera r por su valor $1 - x$ y desarrollando los términos y ordenándolos según las potencias de x. O, de manera más simple, comparando las fluxiones de las dos series y sustituyendo en la primera $\dot{r}$ por $-\dot{x}$. *

3. De forma análoga, la razón entre HCf y HO es

$$\frac{r^{q+1}x^p}{q+1} - \frac{pr^{q+2}x^{p-1}}{(q+1)(q+2)}$$
$$+\frac{p(p-1)r^{q+3}x^{p-2}}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \text{ etc.}$$

4. Si E es el coeficiente del término del desarrollo del binomio $(a+b)^{p+q}$ en el que aparece a^pb^q, la razón entre la figura $ACFH$ y HO es $\{(n+1)E\}^{-1}$, siendo $n = p + q$ ya que, cuando $Af = AH$, $x = 1$, $r = 0$. Por consiguiente, todos los términos de la serie dada en el Art. 2 que expresan la razón entre ACf y HO se anularán excepto el último, y ésta se convierte en

$$\frac{q(q-1)\cdots 1}{(n+1)(p+1)(p+2)\cdots n}.$$

Pero E es el coeficiente del término del desarrollo del binomio $(a+b)^n$ en el que aparece a^pb^q, que es igual a

$$\frac{(p+1)(p+2)\cdots n}{q(q-1)\cdots 1}.$$

Y como Af se supone que es igual a AH, entonces $ACf = ACH$. Por consiguiente este artículo está claro.

5. La razón entre ACf y la figura completa $ACFH$ es (por el Art. 1 y el 4)

$$(n+1)E\left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \text{ etc.}\right]$$

y si, como x expresa la razón entre Af y AH, X debería expresar la razón entre At y AH; la razón entre AFt y $ACFH$ sería

$$(n+1)E\left[\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)X^{p+3}}{2(p+3)} - \text{ etc.}\right]$$

y en consecuencia, la razón entre $tFCf$ y $ACFH$ es $(n+1)E$ multiplicado por la diferencia de las dos series. Si se compara esto con la prop. 10 tendremos la siguiente regla práctica.

Regla 1

Si no se sabe nada relativo a un suceso salvo que ha ocurrido p veces y no ha ocurrido q veces en $p + q$ o n pruebas y de todo esto conjeturo que la probabilidad de que el suceso ocurra en una sola prueba está comprendida entre cualesquiera dos grados de probabilidad X y x, la probabilidad de que mi conjetura sea cierta es $(n+1)E$ multiplicado por la diferencia entre la serie

$$\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)X^{p+3}}{2(p+3)} - \text{ etc.}$$

y la serie

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)} - \text{ etc.}$$

* La fluxión de la primera serie es

$$x^pr^q\dot{x} + \frac{qx^{p+1}r^{q-1}\dot{r}}{p+1} + \frac{qx^{p+1}r^{q-1}\dot{x}}{p+1} + \frac{q(q-1)x^{p+2}r^{q-2}\dot{r}}{(p+1)(p+2)}$$
$$+\frac{q(q-1)x^{p+2}r^{q-2}\dot{x}}{(p+1)(p+2)} + \frac{q(q-1)(q-2)x^{p+3}r^{q-3}\dot{r}}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$
$$+\text{ etc.}$$

o, sustituyendo $\dot{r}$ por $-\dot{x}$,

$$x^pr^q\dot{x} - \frac{qx^{p+1}r^{q-1}\dot{x}}{p+1} + \frac{qx^{p+1}r^{q-1}\dot{x}}{p+1} - \frac{q(q-1)x^{p+2}r^{q-2}\dot{x}}{(p+1)(p+2)}$$
$$+\frac{q(q-1)x^{p+2}r^{q-2}\dot{x}}{(p+1)(p+2)} - \text{ etc.}$$

que, como todos los términos a partir del primero se cancelan, es igual a

$$x^pr^q\dot{x} = x^p(1-x)^q\dot{x} = x^p\dot{x}\left[1 - qx + q\frac{(q-1)}{2}x^2 - \text{ etc.}\right]$$
$$= x^px \quad qx^{p+1}\dot{x} + \frac{q(q-1)x^{p+2}}{2}\dot{x} - \text{ etc.}$$
$$= \text{la fluxión de la última serie, o de } \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \text{ etc.}$$

Las dos series por tanto son la misma.

siendo E el coeficiente de $a^p b^q$ en el desarrollo de $(a+b)^n$.

Esta es la regla adecuada para usarla cuando q es un número pequeño; pero, si q es grande y p pequeño, basta cambiar en la serie que tenemos p por q, q por p, x por r o $(1-x)$ y X por $R = (1-X)$; lo que no produce alteración alguna en la diferencia entre las dos series.

Hasta aquí el ensayo del Sr. Bayes.

En relación con la regla que hemos dado, hay que obsevar además que, cuando ambos p y q son números muy grandes, no será posible aplicarla en la práctica teniendo en cuenta la multitud de términos que contendrá la serie. Por lo que el Sr. Bayes, a resultas de una investigación que sería demasiado prolija para presentar aquí, ha deducido de esta regla otra, que es como sigue

Regla 2

Si no se sabe nada relativo a un suceso salvo que ha ocurrido p veces y no ha ocurrido q veces en $p+q$ o n pruebas y de todo esto conjeturo que la probabilidad de que el suceso ocurra en una sola prueba está comprendida entre $(p/n)+z$ y $(p/n)-z$; si $m^2 = n^3/(pq)$, $a = p/n$, $b = q/n$, E el coeficiente del término en el que aparece $a^p b^q$ cuando se desarrolla $(a+b)^n$, y

$$\Sigma = \frac{(n+1)\sqrt{(2pq)}}{n\sqrt{n}} E a^p b^q$$

multiplicada por la serie

$$mz - \frac{m^3 z^3}{3} + \frac{(n-2)m^5 z^5}{2n \cdot 5} - \frac{(n-2)(n-4)m^7 z^7}{2n \cdot 3n \cdot 7} + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)m^9 z^9}{2n \cdot 3n \cdot 4n \cdot 9} - \text{etc.}$$

mi probabilidad de estar en lo cierto es mayor que

$$\frac{2\Sigma}{1 + 2Ea^p b^q + 2Ea^p b^q/n} \ *$$

y menor que

$$\frac{2\Sigma}{1 - 2Ea^p b^q - 2Ea^p b^q/n},$$

y si $p = q$ mi probabilidad es exactamente 2Σ.

A fin de que esta regla pueda ser útil en todos los casos, únicamente es necesario saber cómo encontrar el valor de $Ea^p b^q$ y también el de la serie $mz - \frac{1}{3}m^3 z^3 +$ etc. con un grado de aproximación suficiente. Con respecto del primero, el Sr. Bayes ha demostrado que, suponiendo que K representa el cociente entre el cuadrante de un arco y su radio, $Ea^p b^q$ será igual a $\frac{1}{2}\sqrt{n}/\sqrt{(Kpq)}$ multiplicado por la *razón*, $[h]$, cuyo logaritmo *hiperbólico* es

$$\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] - \frac{1}{360}\left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right] + \frac{1}{1260}\left[\frac{1}{n^5} - \frac{1}{p^5} - \frac{1}{q^5}\right] - \frac{1}{1680}\left[\frac{1}{n^7} - \frac{1}{p^7} - \frac{1}{q^7}\right] + \frac{1}{1188}\left[\frac{1}{n^9} - \frac{1}{p^9} - \frac{1}{q^9}\right] - \text{etc.}^*$$

donde los coeficientes numéricos se pueden calcular de la siguiente manera. Los denominamos A, B, C, D, E, etc. Entonces

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{3 \cdot 4}, \\
B &= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{A}{3}, \\
C &= \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{10B + A}{5}, \\
D &= \frac{1}{2 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{35C + 21B + A}{7}, \\
E &= \frac{1}{2 \cdot 10 \cdot 11} - \frac{126C + 84D + 36B + A}{9}, \\
F &= \frac{1}{2 \cdot 12 \cdot 13} - \frac{462D + 330C + 165E + 55B + A}{11},
\end{aligned}$$

* En el manuscrito del Sr. Bayes se lee que esta probabilidad es mayor que $2\Sigma/(1+2Ea^p b^q)$ y menor que $2\Sigma/(1-2Ea^p b^q)$. Omite el tercer término de los dos divisores, tal como yo los he dado aquí. Pero esto se debe evidentemente a un pequeño fallo en la deducción de esta regla, de la que tengo razones para pensar que el Sr. Bayes ya la había descubierto. Me he atrevido a corregir su manuscrito y a presentar la regla tal como creo que debiera darse.

* Unos pocos términos de esta serie darán generalmente el logaritmo hiperbólico con un grado de exactitud suficiente. Una serie similar ha sido dada por los Srs. De Moivre, Simpson y otros eminentes matemáticos en una expresión para la suma de los logaritmos de los números 1, 2, 3, 4, 5, a x, cuya suma ellos han afirmado que es igual a

$$\frac{1}{2}\log c + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \text{etc.}$$

donde c denota la circunferencia de un círculo de radio la unidad. Pero el Sr. Bayes en un artículo anterior en este volumen ha demostrado que, aunque esta expresión se aproxima al valor de esta suma cuando se elige un número apropiado de los primeros términos, la serie completa no puede representar en absoluto ninguna cantidad, ya que cualquiera que fuese x, siempre habría una parte de la serie donde empezaría a divergir. Esta observación, aunque no afecta mucho al uso de esta serie, bien merece la atención de un matemático.

etc., donde los coeficientes de B, C, D, E, F, etc. que aparecen en los valores de D, E, F, etc. son los 2º, 3º, 4º, etc. coeficientes mayores en los desarrollos de $(a+b)^7$, $(a+b)^9$, $(a+b)^{11}$, etc.; a los que se adjunta a cada valor particular el menor de estos coeficientes a B, el siguiente en magnitud a la letra más alejada de B, el siguiente a C, el siguiente a la más alejada salvo una de D, la siguiente a la más alejada salvo dos, y así sucesivamente. *

Con respecto al valor de la serie

$$mz - \frac{1}{3}m^3z^3 + \frac{(n-2)m^5z^5}{2n\cdot 5} - \text{etc.}$$

él [el Sr. Bayes] ha observado que se puede calcular directamente cuando mz es menor que 1, o no mayor que $\sqrt{3}$; pero cuando mz es mucho mayor resulta impracticable hacer esto; en tal caso da una forma de encontrar fácilmente dos valores muy próximos entre los cuales debe estar su verdadero valor.

El teorema que [él] da para conseguirlo es el siguiente.

Sea K, como antes, el valor de la razón entre el cuadrante de un arco y su radio, y H la razón cuyo logaritmo hiperbólico es

$$\frac{2^2-1}{2n} - \frac{2^4-1}{360n^3} + \frac{2^6-1}{1260n^5} - \frac{2^6-1}{1680n^7} + \text{etc.}$$

Entonces la serie $mz - \frac{1}{3}m^3z^3 +$ etc. será mayor o menor que la serie

$$\frac{Hn\sqrt{K}}{(n+1)\sqrt{2}} - \frac{n\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}n+1}}{(n+2)2mz} + \frac{n^2\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}n+2}}{(n+2)(n+4)4m^3z^3} - \frac{3n^3\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}n+3}}{(n+2)(n+4)(n+6)8m^5z^5} + \frac{3\cdot 5n^4\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}n+4}}{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)16m^7z^7} - \text{etc.}$$

prolongada a cualquier número de términos, según que el signo del último término sea positivo o negativo.

Sustituyendo estos valores de Ea^pb^q y

$$mz - \frac{1}{3}m^3z^3 + \frac{(n-2)m^5z^5}{2n\cdot 5} - \text{etc.}$$

en la segunda regla se obtiene una tercera regla, que es la regla que se usará cuando mz sea de magnitud considerable.

Regla 3

Si no se sabe nada relativo a un suceso salvo que ha ocurrido p veces y no ha ocurrido q veces en $p+q$ o n pruebas y de todo esto conjeturo que la probabilidad de que el suceso ocurra en una sola prueba está comprendida entre $(p/n)+z$ y $(p/n)-z$, mi probabilidad de estar en lo cierto es *mayor* que

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(Kpq)}h}{\sqrt{(Kpq)}+hn^{\frac{1}{2}}-hn^{-\frac{1}{2}}} \cdot \left\{2H - \frac{\sqrt{2}(n+1)(1-2m^2z^2/n)^{\frac{1}{2}n+1}}{\sqrt{K}(n+2)mz}\right\}$$

y *menor* que

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{(Kpq)}h}{\sqrt{(Kpq)}+hn^{\frac{1}{2}}-hn^{-\frac{1}{2}}} \cdot \left\{2H - \frac{\sqrt{2}(n+1)(1-2m^2z^2/n)^{\frac{1}{2}n+1}}{\sqrt{K}(n+2)mz} + \frac{\sqrt{2}(n+1)(1-2m^2z^2/n)^{\frac{1}{2}n+2}}{\sqrt{K}(n+2)(n+4)2m^3z^3}\right\}$$

donde m^2, K, h y H representan las cantidades anteriormente definidas.

UN APÉNDICE

Que contiene una aplicación de las reglas precedentes a ciertos casos particulares

La primera regla da una solución directa y perfecta en todos los casos; y las dos reglas siguientes son solamente métodos particulares de aproximar las soluciones dadas por la primera regla cuando el trabajo de aplicarla es demasiado grande.

---

* He deducido este método para calcular estos coeficientes de la demostración del tercer lema al final del *Tratado sobre la Naturaleza y la Leyes del Azar* del Sr. Simpson.

La primera regla puede utilizarse en todos aquellos casos en los que bien p o q son cero o no muy grandes. La segunda regla puede utilizarse en todos aquellos casos en los que mz es menor que $\sqrt{3}$; y la tercera en todos los casos en los que m^2z^2 es mayor que 1 y menor que $\frac{1}{2}n$, si n es un número impar y muy grande. Si n no es muy grande, la última regla no es de mucha utilidad ya que, al decrecer m continuamente cuando n disminuye, el valor de z puede en este caso tomarse grande (y, por consiguiente, el intervalo entre $p/n - z$ y $p/n + z$ es muy grande), y sin embargo la operación puede realizarse aplicando la segunda regla, o mz es menor que $\sqrt{3}$.

Pero, a fin de mostrar de una manera clara y completa la naturaleza del presente problema, y hasta donde ha conseguido llegar el Sr. Bayes en su solución, daré el resultado de esta solución en unos pocos casos, comenzando por el más sencillo.

Supongamos, en primer lugar, un suceso como el que se denomina M en el ensayo, o un suceso sobre el que no conocemos nada acerca de su probabilidad antes de realizar las pruebas, salvo que ha ocurrido *una sola vez*, y nos preguntamos qué conclusión se puede obtener de esta información acerca de la probabilidad de que ocurra en una *segunda* prueba.

La respuesta es que habría unas apuestas de tres a uno de que la probabilidad de que ocurriera el suceso en la segunda prueba fuese mayor que un medio.

Ya que, en este caso, y en todos aquellos en los que q es igual a cero, la expresión

$$(n+1)\left\{\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1}\right\} \quad \text{o} \quad X^{p+1} - x^{p+1}$$

da la solución, como se sigue de aplicar la primera regla. Sustituyendo, por lo tanto, en esta expresión $p + 1 = 2$, $X = 1$ y $x = \frac{1}{2}$, resulta $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$, que da la probabilidad de que la probabilidad de que un suceso ocurra una vez esté entre $\frac{1}{2}$ y 1, supuesto que ha ocurrido en una ocasión, o (lo que es lo mismo) las apuestas de que el suceso ocurra en la segunda prueba son mayores que las de uno a uno. *

Del mismo modo se tendría que, si el suceso ha ocurrido dos veces, las apuestas mencionadas serían de siete a uno; si hubiese ocurrido en tres ocasiones, éstas serían de quince a uno; y, en general, si el suceso hubiese ocurrido p veces, habría unas apuestas de $2^{p+1} - 1$ a uno, de que la probabilidad del suceso estuviese entre $\frac{1}{2}$ y 1.

Supongamos, de nuevo, que todo lo que yo sé acerca de un suceso es que ha ocurrido diez veces consecutivas, y nos preguntamos qué razón tendríamos para pensar que estamos en lo cierto si conjeturamos que la probabilidad de que ocurra en una sola prueba esté comprendida entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{16}{17}$, o que la razón entre las causas de su ocurrencia y no ocurrencia sea un cociente comprendido entre diez y seis sobre uno y dos sobre uno.

Aquí $p + 1 = 11, X = 16/17$ y $x = 2/3$ y $X^{p+1} - x^{p+1} = (16/17)^{11} - (2/3)^{11} = 0.5013$ etc. Por tanto, la respuesta es que casi tendremos una probabilidad de 0.5 de acertar.

De esta manera, podemos determinar en cualquier caso qué conclusión debemos inferir de un número de experimentos a los no se opongan experimentos contrarios. Todos entendemos, en general, que hay razones para que esperemos ver un suceso con mayor o menor confianza dependiendo del mayor o menor número de veces en que, bajo las circunstancias dadas, haya ocurrido sin interrupción; pero aquí vemos exactamente cuál es esta razón, en qué principios se basa, y cómo debemos regular nuestras esperanzas.

Pero parece apropiado que analicemos esto en mayor profundidad.

Imaginemos un sólido, o un dado, de cuya constitución o número de caras no sabemos nada, y que vamos a razonar sobre éstas, a partir de los experimentos que hagamos tirándolo.

En este caso, debería observarse que resulta altamente improbable que el sólido, en el primer intento, caiga en alguna cara prefijada, puesto que sabemos que debe caer sobre alguna cara, pero puede haber una infinidad de otras caras, o caras marcadas de otro modo, siendo igualmente probable que puedan aparecer éstas. La primera tirada sólo muestra que el dado *tiene* la cara que ha aparecido, sin aportar razones que nos permitan pensar que tal cara aparecerá más veces que otra cara. Parecerá, por tanto, que *después* de la primera tirada, y no antes, estaríamos en las circunstancias requeridas por las condiciones de este problema, y que todo el efecto de esta tirada sería, precisamente, ponernos en tales circunstancias. Es decir: la aparición del resultado de la primera tirada en una tirada posterior sería un suceso relativo a una probabilidad o improbabilidad de la que no podríamos formar juicio, y de la cual no sabríamos más que que se encuentra entre cero y uno. Con el segundo ensayo, deben comenzar nuestros cálculos; y si en tal ensayo, el sólido imaginado vuelve a aparecer con la misma cara, surge la probabilidad de tres a uno de que tenga más caras de ese tipo que de *todos* los otros tipos de caras; o (lo que viene a ser lo mismo) hay algo en su constitución que hace que tal cara aparezca más a menudo: Y esta probabilidad crecerá, en

* No hay motivos —supongo— para observar que en este asunto 1 siempre se toma como certeza y $\frac{1}{2}$ como equiprobabilidad.

la forma ya explicada, con el número de veces en que ha aparecido tal cara sin fallar. No debe imaginarse, sin embargo, que cualquier número de tales experimentos puede dar razón suficiente para creer que *nunca* aparecerá otra cara. Pues, supongamos que ha aparecido la misma cara en todos los ensayos en un millón de ocasiones. En tales circunstancias, habría una improbabilidad de que tenga *menos* de 1400000 veces estas caras que las otras; pero habría también una improbabilidad de que tenga 1600000 veces más. Esta última probabilidad sería uno menos 1600000/1600001 elevada a la potencia millonésima, que es, aproximadamente, 0.4647 y la otra sería 1400000/1400001 elevada a la misma potencia, que es, aproximadamente, 0.4895. Por ser ambas menores que 0.5, esto demuestra lo que he dicho. Pero aunque sería entonces improbable que tuviese 1600000 veces más o *menos* que 1400000 veces *más* de estas caras que de las otras, no quiere decir que tengamos razón para creer que la verdadera proporción está en este caso entre 1600000 a uno y 1400000 a uno. Porque aquel que se tome la molestia de hacer los cálculos puede comprobar que hay aproximadamente una probabilidad de 0.527, es decir algo más que 0.5, de que esté entre 600000 a uno y tres millones a uno. Debe, quizá, añadirse que es más probable que esta proporción esté entre 900000 a 1 y 1900000 a 1 que entre cualquier par de proporciones cuyos antecedentes estén en relación de 900000 a 1900000, y sus consecuentes sean la unidad.

He hecho estas observaciones principalmente porque son aplicables a sucesos de la Naturaleza. Antes de cualquier experiencia, sería tan improbable como infinito a uno, que cualquier suceso específico, antes de que pueda incluso imaginarse, debería seguir la aplicación de un objeto natural a otro; porque habría una igual probabilidad para un conjunto infinito de otros sucesos posibles. Pero una vez que hayamos visto cualquier efecto particular, como el que arda la madera al ponerla en el fuego, o se produzca la caída de una piedra al apartarla de los objetos contiguos, entonces las conclusiones que se extraigan de cualquier número de sucesos subsiguientes de la misma clase se determinarían de la misma manera a como se ha hecho con el sólido. En otras palabras, el primer experimento que se haga sobre cualquier objeto natural nos informaría sólo de un suceso que puede sufrir un cambio particular en las circunstancias de esos objetos; pero no nos sugeriría ninguna idea de uniformidad en la naturaleza, o darnos la más mínima razón para entender que fue, en ese caso o en cualquier otro, más regular que irregular en sus operaciones. Pero si el mismo suceso se ha producido sin interrupción en uno o varios experimentos consecutivos, entonces se habrá observado algún grado de uniformidad; y se habrá motivos para esperar el mismo éxito en otros experimentos, y los cálculos dirigidos por la solución de este problema podrán llevarse a cabo.

No está de más dar un ejemplo en este punto.

Imaginemos una persona a la que acaban de poner en este mundo, y se le deja que recoja, a partir de sus observaciones del curso y orden de los sucesos, qué fuerzas y causas tienen lugar en él. Probablemente, el Sol sería el primer objeto que llamaría su atención; después de perderlo la primera noche, sería completamente ignorante de si volvería a verlo otra vez. Estaría, por tanto, en las condiciones de una pesona que fuese a realizar su experimento por primera vez sobre un suceso totalmente desconocido para él. Pero dejémosle ver una segunda aparición del Sol, y aumentaría en él la esperanza de un segundo retorno, y él podría saber que hay unas apuestas de 3 a 1 para *alguna* probabilidad de que esto ocurra. Estas apuestas se incrementarían, como antes se representó, con el número de retornos del Sol de los que fuese testigo. Pero ningún número de retornos sería suficiente para producir certeza absoluta, o física. Supongamos, por ejemplo, que lo hubiese visto volver a intervalos regulares un millón de veces. Las conclusiones que esto garantizaría serían como sigue. Habría apuestas de $2^{1000000}$ a uno, de que sería probable que volviese de nuevo al final del intervalo usual. Habría una probabilidad de 0.5352, de que las apuestas a favor de esto no fuesen *mayores* que 1600000 a 1; y una probabilidad de 0.5105, de que no fuesen menores que 1400000 a 1.

Debería recordarse con atención que todas estas deducciones presuponen un desconocimiento total de la naturaleza. Después de haber observado por algún tiempo el curso de los sucesos se encontraría que la naturaleza es, en general, bastante regular y que las fuerzas y leyes que prevalecen son estables y permanentes. La consideración de esto conducirá a que, frecuentemente, algún experimento produzca una esperanza de éxito mucho más fuerte de lo que hubiese sido razonable en otro caso; igual que la observación frecuente de que sucesos de algún tipo aparezcan juntos nos llevaría a concluir, tras descubrir un suceso, que aparecen con muchos otros del mismo tipo. Es obvio que esto, lejos de contradecir las deducciones inevitables, es sólo un caso particular en el que debe aplicarse.

Lo que hemos dicho parece suficiente como para mostrarnos qué conclusiones deben seguirse de una experiencia *uniforme*. En particular, demuestra que en lugar de probar que los sucesos ocurrirán *siempre* de acuerdo con ello, habrá siempre motivos en contra de esta conclusión. En otras palabras, donde el curso de la naturaleza haya sido mayoritariamente constante, sólo podemos tener motivos para confiar en una recurrencia de sucesos dados proporcional al grado de esta constancia; pero no podemos tener motivos para pensar que no hay causas en la naturaleza que *alguna vez* interfieran con las operaciones de las causas de las que se derive esta constancia, o ninguna circunstancia bajo la cual pueda fallar. Y, si esto es verdad, suponiendo que nuestros únicos *datos* se deducen de la experiencia, encontraremos motivos adicionales para pensar así si aplicamos otros principios, o podemos recurrir a otras consideraciones que la razón, independientemente de la experiencia, pueda sugerir.

Pero he ido más allá de lo que tenía previsto; y es hora ya de que prestemos atención a otro problema relacionado; quiero decir, a casos en *los que un experimento* haya a veces acabado en éxito y, a veces, en fracaso.

Aquí, de nuevo, para ser tan claro y explícito como sea posible, resultará adecuado considerar el siguiente caso, que es el más sencillo en el que puedo pensar.

Imaginemos una persona presente en el sorteo de una lotería, que no sabe nada del esquema que se emplea ni de la proporción entre el número de *blancos* y el de *premios* en ella. Supongamos, además, que está obligada a inferir ésta a partir del número de *blancos* que escucha en comparación con el número de *premios*; y nos preguntamos a qué conclusiones podemos llegar razonablemente en tales circunstancias.

Supongamos, primero, que escucha que se han extraído *diez* blancos y *un* premio, y nos preguntamos qué probabilidad tendrá de acertar si conjetura que la proporción entre *blancos* y *premios* está comprendida entre las proporciones de 9 a 1 y de 11 a 1.

Tomando aquí $X = \frac{11}{12}$, $x = \frac{9}{10}$, $p = 10$, $q = 1$, $n = 11$, $E = 11$, la probabilidad requerida, según la primera regla, es $(n+1)E$ multiplicado por la diferencia entre

$$\left\{\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2}\right\} = 12\cdot 11$$

$$\cdot\left\{\left[\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{11}}{11} - \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{12}}{12}\right] - \left[\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{11} - \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{12}}{12}\right]\right\}$$

$$= 0.07699 \text{ etc.}$$

Habría, por tanto, unas apuestas de alrededor de 923 a 76, o casi 12 a 1, *en contra* de que haya acertado. Si hubiese conjeturado sólo, en general, que hay menos de 9 blancos por premio, habría habido una probabilidad de que estuviese en lo cierto de 0.6589 o, [en términos de apuestas] unas apuestas de 65 a 34.

De nuevo, supongamos que escucha que han salido 20 *blancos* y 2 *premios*; ¿qué probabilidad tendrá de acertar si hace las mismas conjeturas?

En este caso, X y x valen lo mismo, pero $n = 22$, $p = 20$, $q = 2$, $E = 231$ y la probabilidad solicitada es igual a

$$(n+1)E\left\{\left[\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)X^{p+3}}{2(p+3)}\right]\right.$$

$$\left.- \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)x^{p+3}}{2(p+3)}\right]\right\}$$

$$= 0.10843 \text{ etc.}$$

Tendrá, por tanto, una mayor probabilidad de acertar que en el caso anterior, estando las apuestas contra él en la relación de 892 a 108 o, alrededor de 9 a 1. Pero, si, como antes, sólo hubiese conjeturado, en general, que hay menos de 9 blancos por premio, su probabilidad de acertar sería peor, puesto que en lugar de 0.6589, o una apuesta de casi dos a uno, sería 0.584, o una apuesta de 584 a 415.

Supongamos, más aún, que ha escuchado que han salido 40 *blancos* y 4 *premios*; ¿cuáles serán las probabilidades antes mencionadas?

Las respuestas ahora serían, respectivamente, 0.1525 y 0.527. Por tanto, habrá apuestas de sólo $5\frac{1}{2}$ a 1 en contra de que la proporción entre blancos que han salido y premios esté comprendida entre 9 a 1 y 11 a 1, y algo más de 0.5 de probabilidad de que sea menos que de 9 a 1.

Una vez más. Supongamos que ha escuchado que se han sacado 100 *blancos* y 10 *premios*.

La respuesta en este caso puede aún hallarse con la primera regla. La probabilidad para que la proporción entre blancos y premios sea *menor* que la de 9 a 1 será 0.44109, y para una proporción *mayor* que la de 11 a 1, es 0.3082. Sería, por tanto, probable que no hubiese *menos* de 9 o *más* de 11 blancos por premio. Pero, al mismo tiempo, será improbable * que la probabilidad esté comprendida entre las razones de 9 a 1 y 11 a 1, siendo esta probabilidad aproximadamente 0.2506. Por tanto, habrá apuestas de casi 3 a 1 en contra de esto.

De estos cálculos, se sigue que, bajo las hipótesis que he hecho, la probabilidad de acertar al conjeturar la proporción entre *blancos* y *premios* coincidirá aproximadamente con la del número de *blancos* respecto al número de premios obtenidos, crecerá continuamente al aumentar estos números; y que, por tanto, cuando son considerablemente grandes, esta conclusión puede considerarse moralmente cierta. Por las mismas razones, se sigue universalmente, con respecto a cualquier suceso del que se haya hecho un número grande de experimentos, que las causas que llevan a su ocurrencia están en

* Me imagino que ninguna persona atenta encontrará problemas en esto. Sólo dice que, suponiendo que el intervalo entre 0 y 1 se divide en cien probabilidades iguales, habrá 44 de ellas a favor de una proporción entre blancos y premios menor que de 9 a 1, 31 para una proporción mayor que de 11 a 1, y 25 para una proporción entre 9 a 1 y 11 a 1. Además, es obvio que, aunque una de esas proposiciones debe ser cierta, puesto que todas ellas tienen más probabilidades en contra que a favor, todas ellas son, por separado, improbables.

la misma proporción que las causas de su no ocurrencia, como el número de ocurrencias al número de no ocurrencias; y que, si un suceso cuyas causas se suponen conocidas, ocurre más frecuentemente o más raramente de lo que estaría de acuerdo con esta conclusión, habrá razones para creer que hay causas desconocidas que perturban el funcionamiento de las [causas] conocidas. Por tanto, en el caso particular de los sucesos naturales, parece que hay evidencia que demuestra que se derivan de causas permanentes, o leyes establecidas originalmente al constituirse la naturaleza de manera que se produzca aquel orden de los sucesos que observamos, y no por ninguna de las fuerzas del azar*. Esto es tan evidente como sería, en el caso en que he insistido, que la razón de sacar 10 veces más *blancos* que *premios* en millones de pruebas fuese, más o menos, que hubiese en [el bombo de la lotería] una proporción similar de *blancos* más que de *premios*.

Pero continuemos un poco más en la demostración de este punto.

Hemos visto que suponiendo que una persona, ignorante de todo el esquema de una lotería, debiese conjeturar, al enterarse de que han salido 100 *blancos* y 10 premios, que la proporción entre *blancos* y *premios* en la lotería esté entre 9 a 1 y 11 a 1, la probabilidad de que esté en lo cierto sería 0.2506 etc. Preguntémonos ahora, cuál sería esta probabilidad en algunos casos más.

Supongamos que en 1100 ensayos han aparecido 1000 *blancos* y 100 *premios*.

En este caso, las potencias de X y x crecen tanto, y el número de términos en las dos series

$$\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{qX^{p+2}}{p+2} \text{ etc.} \quad \text{y} \quad \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{qx^{p+2}}{p+2} \text{ etc.}$$

es tan numeroso que sería excesivamente laborioso obtener la respuesta con la primera regla. Es necesario, por tanto, recurrir a la segunda regla. Pero para usarla, el intervalo entre X y x debe alterarse ligeramente. Como $\frac{10}{11} - \frac{9}{10}$ es $\frac{1}{110}$, el intervalo entre $\frac{10}{11} - \frac{1}{110}$ y $\frac{10}{11} + \frac{1}{110}$ casi coincidirá con el intervalo $\frac{9}{10}$, y $\frac{11}{12}$, sólo que será algo mayor. Si, entonces, nos preguntamos, cuál sería la probabilidad (suponiendo solamente que se han extraído 1000 blancos y 100 premios en 1100 pruebas) de que la probabilidad de obtener un blanco en un sólo ensayo esté entre $\frac{10}{11} - \frac{1}{110}$ y $\frac{10}{11} + \frac{1}{110}$, tendríamos una pregunta del mismo tipo que las preguntas anteriores, y así nos desviaríamos poco de los límites verdaderos.

La respuesta, de acuerdo con la segunda regla, es que esta probabilidad es mayor que

$$\frac{2\Sigma}{1 + 2Ea^pb^q + 2Ea^pb^q/n}$$

y menor que

$$\frac{2\Sigma}{1 - 2Ea^pb^q - 2Ea^pb^q/n}$$

donde Σ es

$$\Sigma = \frac{(n+1)\sqrt{(2pq)}}{n\sqrt{n}} Ea^pb^q \cdot \left\{ mz - \frac{m^3z^3}{3} + \frac{(n-2)m^5z^5}{2n \cdot 5} - \text{etc.} \right\}.$$

Si hacemos $p = 1000, q = 100, n = 1100, z = \frac{1}{110}$,

$$mz = z\sqrt{\left(\frac{n^3}{pq}\right)} = 1.048808, \quad Ea^pb^q = \frac{1}{2}h\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(Kpq)^r}}$$

siendo h la razón cuyo logaritmo hiperbólico es

$$\frac{1}{12}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right] - \frac{1}{360}\left[\frac{1}{n^3} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right] + \frac{1}{1260}\left[\frac{1}{n^5} - \frac{1}{p^5} - \frac{1}{q^5}\right] - \text{etc.}$$

y K la razón entre el cuadrante del arco y el radio; la primera de tales expresiones resulta ser 0.7953, y la última 0.9405, aproximadamente. Por consiguiente, la probabilidad que se busca será mayor que 0.7953 y menor que 0.9405. Esto es, las apuestas de que acierte al conjeturar que la proporción entre blancos y premios esté *aproximadamente* comprendida entre las razones de 9 a 1 y de 11 a 1 (o, *exactamente*, las razones de 9 a 1 y de 1111 a 99), que es mayor que las de 4 a 1, y menor que las de 16 a 1.

Supongamos, de nuevo, que sólo se sabe que los *blancos* han aparecido 10000 veces y los *premios* 1000 veces en 11000 ensayos. ¡Cuál será la probabilidad pedida en tal caso!

Aquí, tanto la segunda como la primera reglas resultan inútiles, pues el valor de mz es tan grande que es difícilmente posible calcular directamente la serie

$$mz - \frac{m^3z^3}{3} + \frac{(n-2)m^5z^5}{2n \cdot 5} - \text{etc.}$$

Debe usarse, por tanto, la tercera regla; y la información que nos da es que la probabilidad requerida es mayor que 0.97421, que corresponde a unas apuestas de 40 a 1 o mayores.

Mediante cálculos similares pueden determinarse universalmente las esperanzas garantizadas por cualesquiera experimentos, según los diferentes números de

---

* Véase la página 250 de la *Doctrina del Azar* del Sr. De Moivre.

veces en que hayan acabado en éxito o fracaso; o lo qué deberíamos pensar de la probabilidad de cualquier causa en la naturaleza, con la que tengamos relación, produzca o no, en una sola prueba, un efecto al que esté asociada.

La mayoría de las personas, probablemente, podrían esperar que las probabilidades en el ejemplo que he dado fuesen mayores que las que he encontrado. Pero esto sólo muestra lo propensos que somos a cometer errores cuando razonamos sin hacer cálculos. Debemos, sin embargo, recordar algo aquí: lo estrecho que es el intervalo entre $\frac{9}{10}$ y $\frac{11}{12}$, o entre $\frac{10}{11}+\frac{1}{110}$ y $\frac{10}{11}-\frac{1}{110}$. Si hubiésemos tomado un intervalo un poco mayor, habría habido una diferencia considerable en los resultados de los cálculos. Así, si lo hubiésemos tomado de doble tamaño, o $z=\frac{1}{55}$, habríamos encontrado en el cuarto ejemplo que en lugar de apuestas en contra habría apuestas a favor de acertar al juzgar que la probabilidad de sacar un blanco en un sólo intento estuviese entre $\frac{10}{11}+\frac{1}{55}$ y $\frac{10}{11}-\frac{1}{55}$.

Los cálculos anteriores nos muestran además los usos y defectos de las reglas que hemos establecido en este ensayo. Es evidente que las dos últimas reglas no nos dan las probabilidades requeridas dentro de límites tan estrechos como desearíamos. Pero, de nuevo, deberíamos considerar que estos límites se hacen más y más estrechos si tomamos q mayor con respecto a p; y cuando p y q son iguales, la solución exacta en ambos casos viene dada por la segunda regla. Por lo tanto, ambas reglas guían nuestro juicio, lo que puede ser de considerable utilidad hasta que alguna persona descubra una aproximación mejor al valor de ambas series en la primera regla *.

Pero quizá lo más importante de este *Ensayo* es que es completo en aquellos casos en los que más se necesita la información, y donde la solución del Sr. De Moivre al problema inverso apenas aporta una solución; quiero decir, en aquellos casos en los que p o q son pequeños. En otros casos, o cuando p y q son grandes, no es difícil percibir la verdad de lo que aquí se ha demostrado, o que hay razón para creer en general que las probabilidades de que ocurra un suceso están respecto a las probabilidades de su fracaso en la misma *razón* que aquélla entre p y q. Pero mucho nos engañaríamos si pensásemos lo mismo cuando p o q son pequeños. Y aunque en esos casos los *Datos* no son suficientes para descubrir la probabilidad exacta de un suceso, sin embargo es útil encontrar los límites entre los que se puede suponer razonable que deba encontrarse, y también ser capaz de determinar el grado preciso de asentimiento que se debe a cualquier conclusión o afirmación relacionada con ellos.

* Desde que esto fue escrito he encontrado un método que mejora considerablemente la aproximación en las reglas segunda y tercera demostrando que la expresión $2\Sigma/(1+2Ea^pb^q+2Ea^pb^q/n)$ se aproxima tanto al verdadero valor como queramos, por debajo. Parece necesario aclarar esto, aunque no demos la demostración.

NOTAS A LA TRADUCCIÓN

En esta tradución, que creemos es la primera que se realiza en lengua española, hemos intentado respetar al máximo el lenguage arcaico del original aun a costa de su inteligibilidad*, excepto en aquellos pocos casos en los que una ligera modificación o actualización aclarase el significado del texto. Así por ejemplo, en el título del Ensayo, hemos traducido *Doctrine of Chances* por *Doctrina del Azar* en lugar de *Teoría de la Probabilidad* como hoy se conoce a esta disciplina. Por la misma razón hemos traducido el título de la obra de De Moivre *Doctrine of Chances* por *Doctrina del Azar*.

La palabra *odds*, que tan frecuentemente aparece en el original, la hemos traducido como *apuestas*, en vez de *razón de puntos*, tal como aparece en el ***Vocabulario Científico y Técnico*** de la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. El motivo es, de una parte, ser fieles al original y, de otra parte, mantener la idea de medir probabilidades en términos de apuestas, tan presente en el mundo anglosajón desde los orígenes del Cálculo de probabilidades. No olvidemos que la evaluación de probabilidades subjetivas, cuyo origen está precisamente en este Ensayo, se realiza, con mucha frecuencia, en términos de apuestas.

La notación matemática del original se ha cambiado por la actual solamente en aquellos casos en las que difiere en exceso, como son los paréntesis, corchetes, etc., aunque siempre se ha intentado respetar al máximo la original.

Los términos newtonianos *fluent* y *fluxion*, que aparecen en el texto, referidos a una función y a su derivada se han traducido, como es habitual, por *fluente* y *fluxión*, respectivamente.

La expresión *hyperbolic logarithm*, con la que se designaba en esa época al *logaritmo natural* la hemos traducido como *logaritmo hiperbólico*. En las tres ocasiones en las que aparece la frase *the ratio of the quadrantal arc to it's radius* —es decir, $\pi/2$, en notación actual— la hemos traducido literalmente por *la razón entre el*

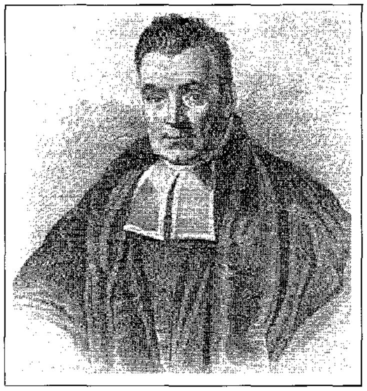
* Me remito a la nota introductoria del tricentenario donde se menciona la dificultad de interpretación del texto en algunos pasajes.

cuadrante de un arco y su radio.

Las dos figuras del texto original se han dibujado de nuevo ajustándose al máximo a las originales, conservando la grafía y el significado de las curvas.

Quiero, finalmente, agradecer a los traductores el esmero que han puesto en su tarea, lo que ha simplicado enormemente las tareas de coordinación y de corrección. Los posibles errores que aun pudieran quedar son únicamente responsabilidad mía.

Francisco Javier Girón



Supuesto retrato de Thomas Bayes (1702?–1761)