Connecting frequentist and bayesian evidence for multivariate point hypotheses

Miguel A. Gómez Villegas
y Beatriz González-Pérez
Universidad Complutense de Madrid
Métodos Bayesianos-08.Madrid
http://www.mat.ucm.es/dptos/es/home.htm
ma.gv@mat.ucm.es

Grupo de METODOS BAYESIANOS

- Concepción Ausín Olivera: Profesora contratada doctora
- Eusebio Gómez Sánchez-Manzano: Profesor titular de Universidad
- Beatriz González-Pérez: Profesora colaboradora
- José A. López Varona: Profesor asociado
- Paloma Maín Yaque: Profesor titular de Universidad
- Juan M. Marín Diazaraque: Profesor titular de Universidad
- Hilario Navarro Veguillas: Profesor titular de Universidad
- Mayte Rodriguez Bernal: Profesora contratada doctora
- Javier Portela García-Miguel: Profesor asociado
- María del Rosario Susi: Profesora colaboradora
- Isabel Salazar Muñoz: Profesor asociado
- Luis Sanz Sanmiguel: Profesor asociado

Publicaciones relacionadas

- Gómez Villegas, M. A. y Gómez Sanchez Manzano, E., (1992) Bayes factor in testing precise hypotheses. *Commun. Statist.Theory Meth.*, **21**(6), 1707-1715.
- Gómez Villegas, M. A. and Sanz, L., (1998) Reconciling Bayesian and frequentist evidence in the point null testing problem. *Test*, **7**(1), 207-216.
- Gómez Villegas, M. A., Maín, P. and Sanz, L., (2002) A suitable Bayesian approach in testing point null hypothesis: some examples revisited. *Commun.Statist. Theory Meth.,* **31**(2), 201-217.
- Gómez Villegas, M. A., Maín, P., Sanz, L. and Navarro, H., (2004) Asymptotic relationships between posterior probabilities and p-values using the hazard rate. *Statist. Probab. Lett.,* **66**(1), 59-66.
- Gómez Villegas, M. A., and González Pérez, B., (2005) Bayesian analysis of contingency tables. *Commun.Statist. Theory Meth.,* **34**, 1743-1754.
- Gómez Villegas, M. A., and González Pérez, B., (2006) A condition to obtain the same decision in the homogeneity testing problem from the frequentist and Bayesian point of view. *Commun.Statist. Theory Meth.,* **35**, 2211-2222.
- Gómez Villegas, M. A., and González Pérez, B., (2008) Epsilon-contaminadas priors in contingency tables. *Test.* **17(** 1), 163-178.
- Gómez Villegas, M. A., Portela, J. and Sanz, L., (2008) A Bayesian test for the mean of the Power Exponential distribution. *Commun.Statist. Theory Meth.,* **37**(18), 2865-2876.

Resumen

- Introducción
- Distribución inicial
- Teorema
- Aplicaciones
- Conclusiones
- Bibliografía

Introducción

- Contraste

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0,$$

- Distribución inicial

$$\pi(\boldsymbol{\theta})$$

$$\pi^*(\boldsymbol{\theta}) = \pi_0 I_{\{\boldsymbol{\theta}^0\}}(\boldsymbol{\theta}) + (1 - \pi_0)\pi(\boldsymbol{\theta}) I_{\{\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0\}}(\boldsymbol{\theta})$$

- Elección de π_0

$$\pi_0 = \int_{E(\theta^0, \delta)} \pi(\theta) d\theta$$

Justificación de la distribución mixta introducida

- **Discrepancia de Kullback-Leibler**

$$D(\pi^* \mid \pi) = \int_{\Theta} \pi(\theta) \ln \frac{\pi(\theta)}{\pi^*(\theta)} d\theta$$

- La discrepancia tiende a cero cuando δ tiende a 0
- Con $\pi_0 = 0.5$ la discrepancia vale 0.693
- En este caso no parece estar justificada una discrepancia simétrica

Medidas de evidencia utilizadas

- El p-valor

$$\Lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{f(x_1,\ldots,x_n \mid \theta_0)}{\sup_{\theta\in\Theta} f(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)}$$

$$p(x_1,\ldots,x_n) = P(\Lambda(X_1,\ldots,X_n) \le \Lambda(x_1,\ldots,x_n) \mid \theta_0)$$

- La probabilidad final

$$P_{\pi^*}(\theta_0 | x_1,\ldots,x_n) \le 0{,}5$$

Se pretende que se den una y sólo una de las siguientes condiciones, para p^* y $\pi(\theta)$ fijos

$$"\, p(x_1,\ldots,x_n) > p^* \wedge P_{\pi^*}(\theta_0 \mid x_1,\ldots,x_n) > 1/2\, "$$

$$"\, p(x_1,\ldots,x_n) < p^* \wedge P_{\pi^*}(\theta_0 \mid x_1,\ldots,x_n) < 1/2\, "$$

- La probabilidad final de la hipótesis puntual es

$$P_{\pi^*}(\theta_0 \mid x_1,\ldots,x_n) = \left[1 + \frac{1-\pi_0}{\pi_0}\eta\right]^{-1}$$

$$\eta(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\int_{\Theta} f(x_1,\ldots,x_n \mid \theta)\pi(\theta)d\theta}{f(x_1,\ldots,x_n \mid \theta_0)}$$

Teorema

Si para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta \neq \theta_0$ con

la distribución mixta dada por

$$\pi^*(\boldsymbol{\theta}) = \pi_0 I_{\{\boldsymbol{\theta}^0\}}(\boldsymbol{\theta}) + (1 - \pi_0)\pi(\boldsymbol{\theta}) I_{\{\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0\}}(\boldsymbol{\theta})$$

Si el cociente de verosimilitud Λ es un estadístico con tendencia creciente

Con respecto al factor Bayes η en un valor $\Lambda = \lambda^*$ entonces para

$$p^* = P\left\{\Lambda \geq \lambda^* \mid \theta_0\right\}$$

Existe un intervalo numérico de valores de π_0 , $I = I(p^*, n) = (l_1, l_2)$

Donde la decisión frecuentista y la bayesiana coinciden.

Aplicaciones

- A la paradoja de Lindley
- A distribuciones iniciales unimodales y simétricas para modelos que sean mixturas de escalas de normales
- A la comparación de dos normales cuando las varianzas son desconocidas pero iguales

Table 2: values of $\delta^*\left(p^*,n,m\right)=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma^2}$ ***where the agreement is reached for*** $\mathbf{Q}_{US}=\{\textit{Unimodal and Symmetric in } \theta_0\}$

δ^*	$m=2$	$m=5$	$m=10$	$m=20$
$p^*=0.5$	2	2.78	3.64	4.88
$p^*=0.1$	4.47	4.53	5.08	6.12
$p^*=0.05$	6.32	5.44	5.7	6.6
$p^*=0.01$	14.14	8.13	7.28	7.7
$p^*=0.001$	44.72	13.95	10.02	9.34

Table 3: agreement in $t = T(\bar{x}, \theta_0) = 7$

$t = 7$	$m = 2$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 20$
$p(t)$	0.0302	0.22064	0.72544	0.9967

$\inf_{\pi \in Q_{us}} P(H_0 \mid t = 7, \delta^*)$	$m = 2$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 20$
$p^* = 0.5$	0.0787	0.23133	0.76331	0.99791
$p^* = 0.1$	0.2992	0.77584	0.98894	0.99998
$p^* = 0.05$	0.46066	0.89648	0.99651	0.9999995
$p^* = 0.01$	0.81027	0.98473	0.9997	0.9999998
$p^* = 0.001$	0.97712	0.99897	0.999988	0.9999999

Conclusiones

- El p-valor y el ínfimo de la probabilidad final, con la metodología propuesta, en el problema puntual multivariante permiten alcanzar la misma decisión (aceptar o rechazar la hipótesis nula)

- En el sentido de que se logra la misma decisión actuando con el p-valor y con la probabilidad final de la hipótesis nula puntual
- En los tres casos analizados el acuerdo es posible debido a la dependencia de la probabilidad final de una función continua estrictamente creciente de un estadístico T

- Cuando ésta dependencia funcional no es posible se obtiene una condición suficiente (la existencia de una función monótona no decreciente del factor Bayes) que permite alcanzar la misma decisión
- Ver Gómez-Villegas, M. A., and González Pérez, B. (2008) The multivariate point null testing problem: A Bayesian discussion, *Statist. and Probab. Letters,* **78,** 3070-3074.

Bibliografía

- Berger, J. O. and Sellke, T. (1987) Testing a point null hyphotesis: the irreconciliability of p-values and evidence, (with discussion), *J. Amer. Stattist. Assoc.,* **82,** 112-139.
- Bernardo, J. M. (1980) A Bayesian analysis of classical hyphotesis testing. *Bayesian Statistics* (J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith, eds.), Valencia: University Press. (with discussion).
- De la Horra, J. (2005) Reconciling classical and prior predictive p-values in the two sided location parameter testing problem, *Commun. Statist.Theory Meth.*, **34**, 575-583.
- Gómez-Villegas, M. A. and Gómez Sanchez-Manzano, E. (1992) Bayes factor in testing precise hypotheses. *Commun. Statist.Theory Meth.*, **21**(6), 1707-1715.
- Gómez-Villegas, M. A., and González Pérez, B. (2008) Epsilon contaminated priors in contingency tables, *Test.,* **17**(1), 163-178.
- Gómez-Villegas, M. A., Maín, P., Sanz, L. and Navarro, H. (2004) Asymptotic relationships between posterior probabilities and p-values using the hazard rate. *Statist. Probab. Lett.,* **66**(1), 59-66.