La forma del Universo

por

Vicente Muñoz, Universidad Autónoma de Madrid,

vicente.munoz@uam.es

Introducción

Una de las preocupaciones más antiguas del hombre es entender el lugar en que se encuentra, si hay otros lugares, si éstos son parecidos y si realmente lo que merece la pena es lo que se encuentra a nuestro alcance.

Desde tiempos ancestrales, mirábamos a nuestro alrededor y veíamos una inmensa planicie. Cierto es que en la dirección vertical encontramos un amplio cielo, plagado de hermosas estrellas, pero ésta es una dirección en la que no nos hemos podido mover hasta muy recientemente. Los indios creían que la Tierra era un inmenso plato colocado sobre una tortuga gigante que lo sustentaba. E incluso en los mapas de la Edad Media, la tierra conocida aparece como un gran círculo.

Esto nos ha llevado al modelo matemático de **plano**. Euclides lo definía como aquel objeto que se extiende indefinidamente en dos direcciones manteniéndose siempre igual a sí mismo. Éste es un modelo que se ajusta bastante bien a lo que vemos a nuestro alrededor, y que por tanto asociamos con todo lo que queda más allá de nuestra vista. (Ésta es una constante en el pensamiento del ser humano a lo largo de la Historia: desde la pequeñez del alcance de nuestras percepciones inferimos acerca de la realidad en la creencia de cierta omnipotencia en nuestras averiguaciones.)

Los hombres estuvimos un montón de siglos creyendo que la Tierra, el lugar que habitábamos, era un plano (o trozo de plano) que estaba colocado en la mitad del Todo. Afortunadamente, tenemos posibilidades de imaginar que nuestra Tierra pueda tener una forma distinta de la forma plana. Vivimos en un mundo de tres dimensiones. Vemos una naranja y nos la podemos imaginar de un tamaño gigantesco, en el que su superficie casi parezca plana. De hecho, en la época de los griegos ya se intuía (por un proceso deductivo) que la Tierra debía ser esférica. Eratóstenes (276-197 A.C.) ya calculó con cierta exactitud el perímetro de la Tierra comparando las sombras producidas por dos torres en el mismo momento del día en puntos distantes.

Pero el ser humano es tozudo y tiempo después, durante la Edad Media y el Renacimiento, se condenaba a gente a arder en la hoguera por afirmar que la Tierra no era plana. Sólo nos convencimos de la redondez de la Tierra cuando Magallanes y Elcano completaron una vuelta a esta inmensa pelota (1519–1522).

La idea de una Tierra plana nos llena ciertamente de desasosiego. O bien se extiende indefinidamente como un plano o bien se acaba como un plato. En el primer caso, estamos perdidos en la inmensidad: si sólo ocupamos un pequeño trozo de un territorio infinito, no somos prácticamente nada. ¿Qué importancia tenemos ante tal inmensidad? En el segundo caso, la Tierra se acaba, tiene un límite. Si logramos llegar al borde ¿qué encontraremos? ¿caerémos al abismo? Una Tierra redonda es más reconfortante. Si nos empeñamos en ir en una dirección fija y continuamos alejándonos, acabaremos por llegar a un punto que se encuentra lo más lejos posible del punto de partida (antípoda) y al continuar desplazándonos, nos estaremos acercando de nuevo, pero por dirección opuesta de la que partimos. No hay infinitud, y no hay borde.

Pero ¿es ésta la única posible forma de la Tierra? ¿Existen otras posibilidades?

El tema no debería plantearse de forma muy distinta cuando miramos un poco más allá, a nuestro Universo. Tenemos claro que vivimos en un planeta, que gira alrededor de una estrella mediana y que está en una rama de una galaxia espiral de tamaño medio (La Via Láctea). Con todos nuestros telescopios, apenas vemos un pequeño fragmento del Universo de 500 millones de años-luz, una insignificancia para un tamaño estimado de 20.000 millones de años-luz. Si miramos a nuestro alrededor, vemos tres direcciones perpendiculares entre sí y bien definidas. El concepto matemático al que nos lleva es al de espacio lineal ($\mathbb{R}^3$ diría un geómetra).

¿Pero vamos a deducir de aquí que todo nuestro Universo es un espacio lineal?

Una posible solución es que el Universo fuera una hiperesfera (esfera de dimensión 3), es decir $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$.

En esta situación, si nos alejamos indefinidamente en una dirección, acabamos regresando al punto de partida por la dirección opuesta a la que tomamos. Bastaría lanzar un viajero interestelar (un rayo de luz, por ejemplo) y esperar. Pero en los 12.000 millones de años de nuestro joven Universo, el viajero todavía no ha tenido tiempo de dar una vuelta completa. ¡Y encima el Universo se está expandiendo!

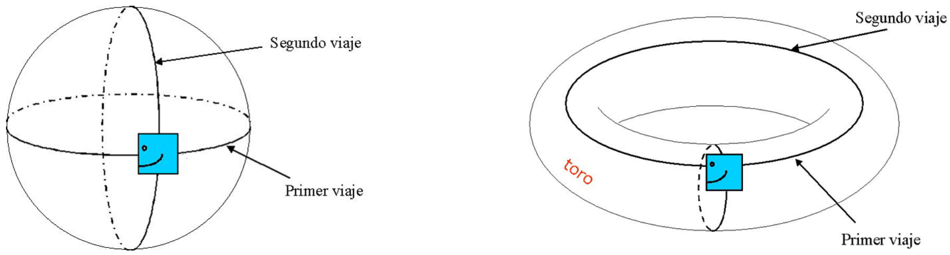
7.1 Un mundo en dos dimensiones

Para entender cómo podemos enfrentarnos ante nuestra limitación de entender los cuerpos de tres dimensiones estando nosotros mismos inmersos en un mundo de tres dimensiones, vamos a revisar una famosa biografía de un habitante de un mundo de dos dimensiones. Edwin Abbott (1838–1926) escribió un libro titulado *Flatland: A romance in many dimensions* donde narra (en forma de biografía) las desventuras de un habitante que llamaremos Planito en un Universo de dos dimensiones llamado Planilandia. Este libro, que apareció de hecho como una crítica social, nos va a servir de excusa con el fin de entender las dificultades de compresión para un ser atrapado en su propia dimensión. En el libro *The shape of space*, J. Weeks narra las aventuras de Planito cuando decide averiguar que forma tiene realmente Planilandia.

Planito vive en un mundo de dos dimensiones, junto con muchos otros seres como él (es decir, de dos dimensiones). Su percepción del mundo es la de un plano que se extiende indefinidamente en dos direcciones. No tienen más que los conceptos de longitud y anchura. El concepto de altura es para ellos inimaginable, como lo es para nosotros el concepto de cualquier dimensión de la que no tengamos percepción física. Todo el territorio por ellos explorado hace parecer de Planilandia un inmenso plano. La creencia popular es por tanto la lógica en esta situación: Planilandia es un plano, infinito e ilimitado en todas direcciones.

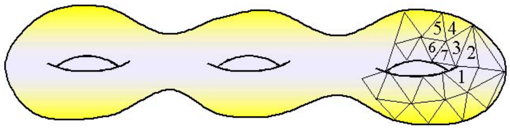
El concepto de infinitud es incómodo y Planito se plantea la opción de un mundo finito (en términos matemáticos, diriamos que su espacio es **compacto**). Pero por otro lado la idea de que el mundo tiene un borde, un final, un límite, es igualmente odiosa. Por tanto Planito intenta imaginar Planilandia como una superficie compacta sin borde. Para ello recurre a un **análogo dimensional** (justo lo que nosotros hacemos ahora). Mira a Linealandia, un mundo de una dimensión, cuyos seres son segmentos que viven en una recta y que no tienen conciencia de nada fuera de esta recta. Planito dibuja una circunferencia, y piensa “los seres de Linealandia pueden vivir en un mundo finito y sin bordes y creer que están en una recta infinita”. La analogía dimensional nos lleva a la idea de una hiper-circunferencia: un mundo de dos dimensiones en el que yendo en una dirección fija acabas retornando al punto de partida. Es decir, una esfera. Pero ciertamente es difícil de imaginar si uno no tiene la oportunidad de agarrar un balón entre sus manos.

Para corroborar su teoría se embarca en un largo viaje: camina hacia el oeste manteniendo su rumbo, hasta que al cabo de varios meses acaba llegando al lugar de partida. Esto no convence a ninguno de sus coetáneos: lo justifican diciendo que ha debido ir desviando ligeramente su camino para acabar volviendo al lugar de partida. Planito quiere corroborar su teoría y hace otro viaje, esta vez manteniendo rumbo al norte. Al cabo de un par de meses llega a su ciudad de origen. Pero lo que resulta más sorprendente: no se ha cruzado con los pasos dejados en su primer viaje. Su teoría de la hiper-circunferencia es incorrecta, pero ¡Planilandia no puede ser un plano, tampoco!



Estas expediciones constituyen el comienzo de una revolución en Planilandia: aparecen decenas de estudiosos de la teoría de la forma de Planilandia, a la que denominan *topología de dos dimensiones*. Esta teoría tiene los siguientes objetivos: analizar la forma de los objetos, sin tener en cuenta los tamaños ni que algunas partes de los objetos se agranden o encojan. Es decir se analizan los objetos salvo **homeomorfismo**. Generalmente, se dice que para un topólogo, no importa la diferencia entre un taza y una rosquilla.

Con este objetivo, Planilandia se dividió en zonas triangulares, cada una de las cuales fue explorada por alguna expedición para realizar mapas, que quedaban archivados y numerados. Enseguida se observó que bastaba con indicar qué zonas triangulares se debían pegar a cuáles. Se podía determinar la forma de una superficie de esta manera. Se podría decir que descubrieron la **Topología PL** (del inglés: Piecewise-Linear, que quiere decir, lineal a trozos).



La topología PL permite dar una bella demostración del teorema de clasificación de superficies a base del proceso de cortar y pegar. Ésta puede encontrarse en el primer capítulo del libro *Algebraic Topology: an Introduction* de W. Massey.

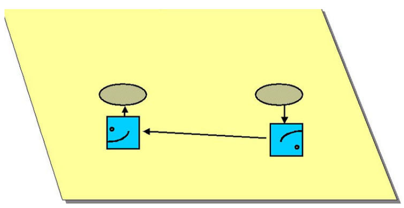
Teorema 7.1 (**Clasificación de superficies**) *Las superficies compactas sin borde, salvo homeomorfismo, son las siguientes:*

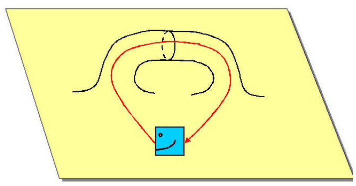
- *Orientables: esfera, toro y sumas conexas de g toros, $g \geq 2$.*
- *No orientables: plano proyectivo, botella de Klein y sumas conexas de estas dos con g toros, $g \geq 1$.*

Ahora necesitamos una serie de procedimientos que nos permitan construir estas superficies. Lo que es más importante, necesitamos que los procedimientos sean intrínsecos, es decir, puedan entenderse desde una perspectiva de dos dimensiones, para que les sean útiles a los topólogos de Planilandia.

Pegado de asas

Hay una zona circular (A) de Planilandia que funciona como una puerta inter-espacial: cuando se entra por dicha zona, se sale por otra zona (B) en un punto alejado de Planilandia. Pensamos en la superficie topológicamente, estiramos las zonas alrededor de (A) y (B) para acercarlas y acabar juntándolas. El resultado es equivalente a haber pegado un tubito conectando las zonas (A) y (B) (a esto se le denomina técnicamente pegar un asa, o en inglés, handle). De hecho, la percepción de la puerta inter-espacial para Planito es la misma que tendría si dicho tubito estuviese pegado; la zona misteriosa se convierte en el meridiano central del asa y el viaje de Planito queda descrito en el siguiente dibujo.

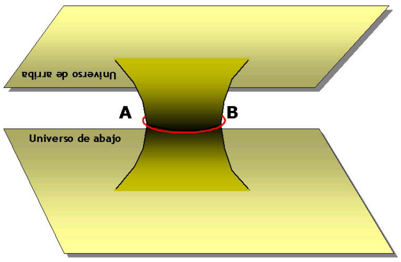




Por ejemplo, si el pegado de un asa lo hacemos a una esfera, obtenemos un toro. Este resultado se visualiza fácilmente dibujando las superficies en un mundo de tres dimensiones, pero el resultado también es conocido para los topólogos de Planilandia. Es decir, se puede estudiar la superficie de manera intrínseca, basta con decir como van pegadas las dos circunferencias (A) y (B).

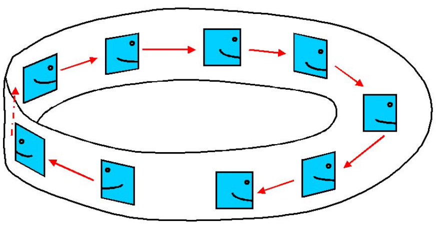
Suma conexa

Planilandia consta de hecho de dos superficies disjuntas X e Y tales que se puede ir de una a otra a través de una puerta inter-espacial (A) que está en X, que nos lleva directamente a (B) en Y. Se vuelve de Y a X dando la vuelta al camino. Si aplicamos el proceso topológico de acercar y pegar las zonas (A) y (B), obtenemos una superficie en la que X e Y están unidas por un pequeño tubo. A este proceso se lo denomina *suma conexa* de X e Y y se denota por $X\#Y$. Cualquier habitante de Planilandia percibe de hecho su mundo como la superficie $X\#Y$.

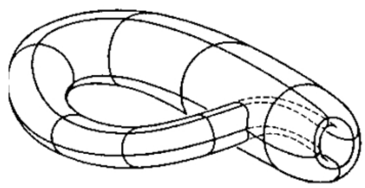


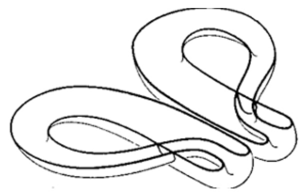
Orientabilidad

Un grupo de exploradores de Planilandia hacen un largo viaje y a su regreso vuelven ¡del revés! Es decir, el lado derecho de su cuerpo está a la izquierda y viceversa. Claro que su percepción de la realidad es distinta: ellos no se sienten extraños, sino que ven que el mundo al que regresan se ha convertido en la imagen especular de lo que era. De hecho, hay una zona del espacio que es una banda de Möbius. Una banda de Möbius se obtiene tomando una cinta larga y pegando sus dos extremos dando media vuelta a uno de ellos.



A una superficie en la que ocurre esto se la llama **no orientable**. En este espacio no tiene sentido hablar de izquierda y derecha (cualquier intento de imponer alguna convención de este tipo estaría abocada al fracaso). Hay otras superficies no orientables, y sobre todo, existen ejemplos compactos. La banda de Möbius tiene un sólo borde, por tanto tal borde es una circunferencia y podemos pegar a él el borde de un disco. Obtenemos así lo que se denomina un **plano proyectivo**. Si pegamos dos bandas de Möbius por sus bordes, obtenemos una **botella de Klein**.





Ninguna de estas superficies se pueden dibujar en un espacio de dimensión 3, por lo que resultan difíciles de imaginar para nosotros. ¡Así podemos compartir las dificultades de los habitantes de Planilandia!

Característica de Euler-Poincaré

Para cualquier superficie, una vez triangulada podemos contar los números de vértices, lados y triángulos, obteniendo tres números: v, l y t. La cantidad

$$\chi = v - l + t,$$

se denomina **Característica de Euler-Poincaré** de la superficie. Este número no depende de la triangulación (es un invariante). Tenemos la siguiente lista completa de posibilidades

$$\begin{cases} \text{orientable} & \begin{cases} \text{esfera} & \chi = 2 \\ \text{toro} & \chi = 0 \\ \text{suma conexa de } g \text{ toros} & \chi = 2 - 2g \end{cases} \\ \text{no orientable} & \begin{cases} \text{plano proyectivo} & \chi = 1 \\ \text{botella de Klein} & \chi = 0 \\ \text{suma conexa de plano proyectivo y } g \text{ toros} & \chi = 1 - 2g \\ \text{suma conexa de botella de Klein y } g \text{ toros} & \chi = -2g \end{cases} \end{cases}$$

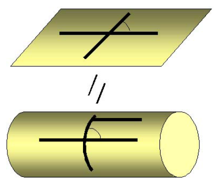
Por tanto, los habitantes de Planilandia pueden conocer qué tipo de superficie es

Planilandia atendiendo a dos criterios: si es orientable o no y su característica de Euler-Poincaré.

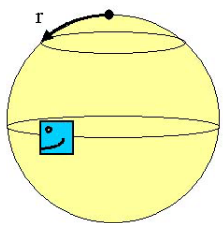
7.2 Geometrías en dos dimensiones

Tras descubrir los teoremas de clasificación de superficies, se comenzaron a hacer en Planilandia mapas rigurosos de las distintas zonas, para lo cual se hacían mediciones muy exactas de distancias, ángulos, áreas y formas. Al estudio de las propiedades métricas de una superficie se le denomina **Geometría**. Así, se dice que dos superficies tienen la misma geometría, no cuando se pueden deformar la una en la otra, como ocurría cuando tenían la misma topología, sino cuando las mediciones de ángulos, longitudes, etc. realizadas en ambas coinciden. Técnicamente, esto corresponde al concepto de ser **isométricas**, es decir, tener la misma Primera Forma Fundamental.

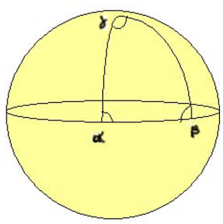
Recordemos que la Primera Forma Fundamental (también llamada *métrica* de la superficie) nos da la longitud de cada vector en cada punto, y que sirve para hacer todo tipo de mediciones métricas en la superficie. Desde un punto de vista 3-dimensional, dos superficies son isométricas si, una vez hechas de un material rígido pero flexible (como por ejemplo, una hoja de papel), se puede colocar una encima de otra sin arrugar. El ejemplo clásico es el de un trozo de plano y un cilindro.



Planito se dedicó a medir los ángulos de los triángulos de Planilandia con extrema precisión. Llegó a la conclusión de que, cuando estos triángulos eran muy grandes, los ángulos sumaban más de 180^o. Esto resultó paradójico, pues todos los estudios a pequeña escala (en los que siempre se aproximaba a Planilandia con un plano) decían que los ángulos debían sumar exactamente esa cantidad. El hecho se podía explicar porque Planilandia era una esfera. Por ejemplo, en el del dibujo, la suma de los ángulos del triángulo es $90^o + 90^o + 90^o = 270^o$.



$l < 2\pi r$



$\alpha + \beta + \gamma > 2\pi$

La diferencia entre 180^o y la suma de los ángulos de un triángulo en una superficie está determinada por la curvatura $\kappa(p)$ de la métrica. En un plano, la curvatura es siempre $\kappa \equiv 0$, y los conceptos métricos se reducen a los que nos da la intuición de la geometría Euclídea. Por ejemplo, si trazamos una circunferencia alrededor de un punto p de radio r, su longitud es $2\pi r$. Cuando la curvatura no es cero, tenemos la siguiente fórmula

$$\text{longitud de la circunferencia} = 2\pi r - \frac{1}{3}\kappa(p)\pi r^3 + O(r^5).$$

Por tanto, si la curvatura es positiva, la circunferencia tiene longitud menor que $2\pi r$, tal y como ocurre en la esfera (ver dibujo). Si $\kappa(p)$ fuese negativa, la circunferencia tendría longitud mayor que $2\pi r$.

La cantidad de posibles métricas (geometrías) en una superficie es infinita. Pero no si imponemos alguna condición adicional. Se observó en Planilandia que las distintas zonas no eran muy diferentes unas de otras. De hecho, las mediciones de variables geométricas coincidían en los distintos puntos. Por otro lado, en cada punto, la superficie parece la misma mirada en cualquier dirección. Esto corresponde con el concepto matemático de **geometría isótropa**.

Definición 7.2 Una superficie (con una métrica) tiene geometría isótropa si

- $\forall p, q$, existe una isometría de $\phi : U_p \to U_q$ entre un entorno U_p de p y otro U_q de q.
- $\forall p$, $\forall u, v$ vectores tangentes en p, existe una isometría $\phi : U_p \to U_p$ de un entorno U_p en sí mismo con $d\phi_p(u) = v$.

En una superficie, la única cantidad que determina la geometría de la superficie es la curvatura $\kappa(p)$ en cada punto. Por tanto, la geometría es isótropa si y sólo si, la curvatura $\kappa(p) \equiv k_0$ es constante. Las geometrías isótropas se dividen por clases

- Elíptica si $k_0 > 0$.
- Euclídea si $k_0 = 0$.
- Hiperbólica si $k_0 < 0$.

Para una superficie compacta, la curvatura se relaciona con la característica de Euler-Poincaré a través del siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en el libro de DoCarmo.

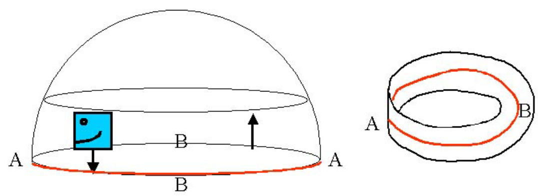
Teorema 7.3 (**Gauss-Bonnet**) *Supongamos que S es una superficie compacta y sea A su área. Entonces $k_0 A = 2\pi\chi$.*

Por tanto, conociendo el área de Planilandia, calculando su curvatura κ que es una magnitud local, y sabiendo si es o no orientable, se puede averiguar cuál es su forma.

Geometrías elípticas

Si la curvatura es $k_0 > 0$, el teorema de Gauss-Bonnet nos da $\chi > 0$. El teorema de clasificación de superficie nos da dos posibilidades: la esfera y el plano proyectivo (una orientable y la otra no). La pregunta natural es si de hecho estas superficies tienen (mejor dicho, admiten) geometrías isótropas. La esfera $\mathbb{S}^2$, tal como la conocemos nosotros, es decir, dibujada como una esfera de radio R en el espacio $\mathbb{R}^3$, tiene curvatura constante $k_0 = \frac{1}{R}$, luego admite una geometría elíptica.

El plano proyectivo también admite una geometría elíptica, siendo el motivo fundamental que se obtiene como un cociente de $\mathbb{S}^2$. Pero nosotros vamos a usar la definición de plano proyectivo como unión de una banda de Möbius y un disco pegados por su borde. Tomamos $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$, la semiesfera con $R = 1/k_0$. Aplicamos la siguiente regla de pegado: cuando atravesamos el ecuador $z = 0$ de arriba a abajo por el punto $(x, y, 0)$ salimos por el punto $(-x, -y, 0)$ de abajo hacia arriba. El espacio resultante es un plano proyectivo, el disco consiste de los puntos con $z \geq R/2$ y la banda de Möbius consta de los puntos con $0 \leq z \leq R/2$.



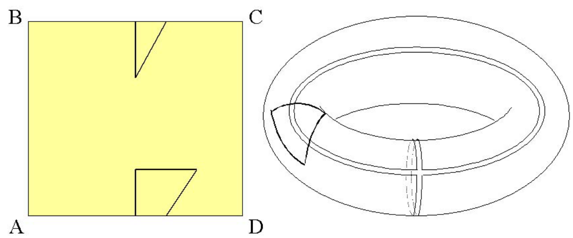
La geometría elíptica es fácil de obtener. Los puntos con $z > 0$ tienen curvatura $\kappa(p) = k_0$, pues están en un trozo de esfera. Para los puntos de $z = 0$, un entorno suyo está formado por dos semicírculos, uno de la forma $B_\epsilon(x, y, 0) \cap \{z \geq 0\}$ y otro de la forma $B_\epsilon(-x, -y, 0) \cap \{z \geq 0\}$ que es equivalente a $B_\epsilon(x, y, 0) \cap \{z \leq 0\}$. Entre ambos, obtenemos un pequeño trozo de casquete esférico. Por tanto estos puntos no son distintos de los demás puntos.

Siempre que una superficie X admite una geometría isotrópica, su recubridor universal $\pi : \tilde{X} \to X$ es un espacio simplemente conexo que admite una geometría de la misma clase. Esto se debe a que π es una isometría local (es decir, $\tilde{X}$ y X son geométricamente iguales a pequeña escala). Además la superficie simplemente conexa es única, es decir, sólo hay una para cada una de los tres tipos de geometrías isotrópicas. En el caso de las geometrías elípticas, el modelo simplemente conexo es $\mathbb{S}^2$.

Geometrías euclídeas

El modelo de geometría euclídea (es decir, con curvatura $k_0 = 0$) simplemente conexo es el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$. Es por esto que a este tipo de geometrías también se las denomina geometrías planas.

Si la superficie es compacta, el teorema de Gauss-Bonett nos da $\chi = 0$ y de nuevo sólo hay dos posibilidades, el toro y la botella de Klein (una orientable, la otra no). Ambas superficies admiten de hecho geometrías euclídeas. Las podemos construir de la siguiente forma. Para el toro, consideremos el cuadrado ABCD y pegamos con el siguiente criterio: cuando salimos hacia la derecha por el lado CD, entramos por el punto a la misma altura de AB. También, cuando salimos por el lado BC entramos por AD. El espacio que obtenemos es, topológicamente, el mismo que un toro, como puede verse en el dibujo.



Sin embargo, esta manera de construirlo, permite dar una geometría euclídea, que es la geometría plana del cuadrado ABCD. Incluso los puntos del borde o los de la esquina poseen la misma geometría. Por ejemplo, los puntos de la esquina han de ser pegados todos ellos juntos formando 4 ángulos rectos que concurren en un punto. La geometría de cada uno de estos cuadrantes es plana, luego la geometría en el punto resultante p es la de un pequeño entorno plano con $\kappa(p) = 0$. Lo curioso es que el dibujo usual del toro de $\mathbb{R}^3$ **no** tiene una geometría plana. No es la geometría que uno visualiza en $\mathbb{R}^3$ la geometría correcta para el toro, aunque a un habitante de Planilandia, que ni siquiera conoce la dimensión tres, esto no le produce ninguna confusión.

La botella de Klein se obtiene por un proceso similar. Hay que pegar los lados

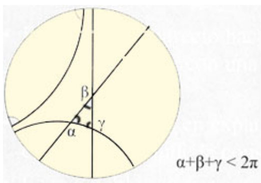
AB y CD, BC y AD como antes, pero con una diferencia: en el caso de salir por el lado CD a distancia x de C, salimos por el lado AB a distancia x de A. Esto nos da una botella de Klein. Una banda de Möbius es $\{1/4 \leq y \leq 3/4\}$ y la otra es $\{y \geq 3/4\} \cup \{y \leq 1/4\}$. La geometría que obtenemos es de tipo euclídeo.

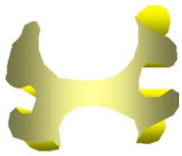
Geometrías hiperbólicas

Todas las demás superficies admiten geometrías hiperbólicas (y hay infinitas de éstas). El modelo simplemente conexo con curvatura $k_0 < 0$, es el plano hiperbólico, que se suele representar con el disco de Poincaré. Es decir, $\{(u, v)|u^2 + v^2 < 1\}$ con la métrica

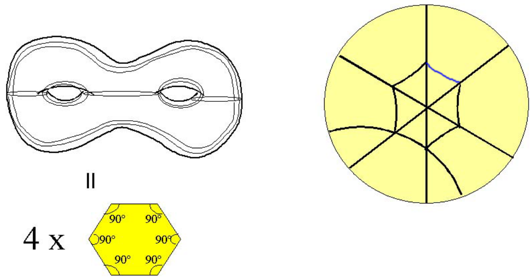
$$ds^2 = \frac{\sqrt{k_0}}{1 - u^2 - v^2}(du^2 + dv^2).$$

En esta métrica las distancias se distorsionan (se alargan) cerca del borde del disco). Las geodésicas, o líneas de mínima distancia son o bien (segmentos de) rectas por el origen, o bien (arcos de) circunferencias ortogonales al borde del disco. Es más, este es un modelo conforme: las distancias no se perciben visualmente, pero los ángulos sí. En esta geometría, los triángulos tienen ángulos cuya suma es menor que 180^o. De hecho, aumentando el área, se pueden construir triángulos cuya suma de sus ángulos sea tan pequeña como queramos.





Tomamos la superficie orientable de género $g \geq 2$. Vamos a poner una geometría hiperbólica en ella. Para esto, la dividimos en hexágonos con 6 ángulos rectos cada uno, y ponemos una geometría hiperbólica en cada uno de estos hexágonos. Es suficiente encontrar un hexágono con ángulos de 90^o en el disco de Poincaré. Tomamos un triángulo con ángulos de 60^o, 45^o y 45^o grados, respectivamente y lo rotamos 6 veces, hasta formar un hexágono. Algo parecido valdría para las superficies no orientables, pero no entraremos en detalles.

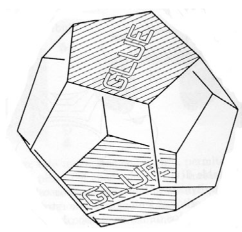


7.3 Geometrías en tres dimensiones

A la hora de estudiar los espacios de tres dimensiones, las 3-variedades, es lógico comenzar por hacer una clasificación topológica de todas las variedades compactas de dimensión 3. Éste es un problema matemático muy duro, en el que ha habido muchos avances de los que han surgido desarrollos matemáticos tales como la teoría de nudos, el programa de geometrización de Thurston, etc. pero que aún está inconcluso. En esta dirección tenemos la famosa Conjetura de Poincaré

Conjetura 7.4 **(Poincaré, 1906)** *Si S es una variedad de dimensión 3 compacta y simplemente conexa (es decir, que todo lazo en S se puede contraer a un punto de modo continuo), entonces S es homeomorfa a la esfera de dimensión 3, $\mathbb{S}^3$.*

Poincaré primeramente propuso la conjetura de que si una variedad compacta S de dimensión 3 tenía primer grupo de homología $H_1(S;\mathbb{Z}) = 0$ entonces S era homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^3$. Al poco tiempo, él mismo encontró un contraejemplo. La conocida desde entonces como variedad de Poincaré es una variedad compacta de dimensión 3 no simplemente conexa pero con $H_1(S;\mathbb{Z}) = 0$. Se construye a partir del dodecaedro pegando caras opuestas con una rotación de 36^o.



La conjetura de Poincaré es una de las más famosas conjeturas en matemáticas y que ha resistido más tiempo a ser probada. De hecho, es uno de los siete problemas del Nuevo Milenio, por cuya solución el Clay Mathematics Institute ofrece un millón de dólares.

A la hora de construir variedades de dimensión 3 (lo que supone el primer paso para poder clasificarlas), tenemos una serie de procesos topológicos similares a los que hemos discutido para superficies.

Pegado de 1-asas

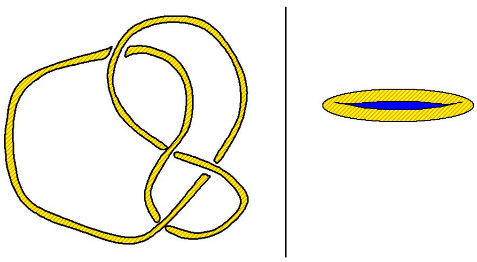
Tomamos dos pequeñas esferas macizas en dos zonas alejadas de una 3-variedad. Decretamos que cada vez que entramos por una de ellas salimos por la otra por el punto correspondiente. Esto se corresponde con quitar los interiores de las esferas y pegar las dos superficies esféricas que quedan. El resultado es equivalente a pegar un asa a la 3-variedad. Este asa 3-dimensional se denomina 1-asa, pues añade un lazo nuevo al grupo fundamental π_1 de la superficie.

En el caso de tener dos 3-variedades disjuntas y aplicar el proceso anterior a dos esferitas, cada una de ellas en una de las 3-variedades, obtenemos la suma conexa de ambas.

Pegado de 2-asas

Ahora tomamos un lazo (una circunferencia) sin auto-intersecciones dentro de la 3-variedad y lo engordamos un poco. Así tenemos un toro sólido cuyo borde es un toro usual. Supongamos que tenemos otro toro sólido disjunto. Podemos aplicar el proceso de quitar los interiores de los toros sólidos y pegar los toros (sus bordes). Así obtenemos una nueva 3-variedad.

Este método proporciona una enorme cantidad de posibilidades, dado que el lazo puede estar anudado dentro de la 3-variedad, lo que habitualmente se conoce como un **nudo**.



Además, el pegado de los bordes se puede hacer de diversas formas. En cada uno de los toros tenemos una longitud l, circunferencia que va paralela al lazo, y un meridiano m, circunferencia que rodea un disco perpendicular al lazo. El pegado de los dos toros viene descrito por una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en términos de las bases $\{l, m\}$ del primer toro y $\{l, m\}$ del segundo. Necesitamos que a, b, c, d sean enteros y que $ad - bc = 1$.

En general, los pegados de 2-asas se efectúan de la siguiente manera: se toma un nudo (engordado) en una 3-variedad y un toro sólido estándar en la esfera $\mathbb{S}^3$. Al quitar el toro sólido de $\mathbb{S}^3$, lo que queda es de nuevo un toro, que es el que se pega a lo largo del borde del nudo engordado inicial. A este proceso se le denomina cirugía a lo largo de un nudo y la elección de matriz es equivalente a elegir un número racional $a/b \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ (el coeficiente de cirugía).

Un teorema asegura que toda 3-variedad compacta se obtiene por pegado de 1-asas y 2-asas a partir de la esfera $\mathbb{S}^3$. Por tanto el problema de clasificación de las 3-variedades se traslada a otro problema igualmente difícil, el de la clasificación de los nudos.

Geometrías isotrópicas en dimensión 3

En una situación en la que no tenemos a nuestra disposición un teorema de clasificación de 3-variedades topológicas, uno espera que el problema de clasificar las geometrías isotrópicas sea igualmente complejo.

Dada una métrica en una variedad de dimensión 3, la curvatura en un punto p no es solamente un número, como en el caso de las superficies, sino que tenemos una colección de curvaturas. Para cada plano tangente en p, tomamos una pequeña superficie formada por las geodésicas que parten de p y son tangentes al plano dado. Así obtenemos una superficie de la que calculamos su curvatura gaussiana. Esta colección de curvaturas para cada plano tangente se denominan **curvatura seccional** de la 3-variedad. Para una geometría isotrópica, las distintas curvaturas seccionales en p coinciden dado que para dos planos tangentes distintos, siempre hay una isometría (de un entorno de p) que lleva uno a otro. A este número lo llamaremos $\kappa(p)$. Como ademas, dados dos puntos p y q, hay una isometría de un entorno de p en un entorno de q, tenemos que las curvaturas coinciden en todos los puntos, es decir, $\kappa(p) = k_0$ es constante. Atendiendo al signo de k_0 tenemos tres tipos de geometrías:

• Geometría Elíptica: cuando $k_0 > 0$. El modelo simplemente conexo es la esfera $\mathbb{S}^3$ de radio $R = 1/\sqrt{k_0}$, dada por $\{(x, y, z, w)|x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2\}$. La esfera también puede ser visualizada por proyección estereográfica como $\mathbb{R}^3$ y un punto en el infinito. Pero entonces la métrica queda

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Como $\mathbb{S}^3$ es compacto, todas las 3-variedades con geometría elíptica son compactas también. Como ejemplos, tenemos el espacio proyectivo de dimensión 3 (que por ser de dimensión impar, es orientable) y la variedad de Poincaré.

En una variedad con geometría el elíptica, los ángulos de los triángulos suman más de 2π. El área de una esfera de radio $r > 0$ alrededor de un punto es menor que $\frac{4}{3}\pi r^2$. Los ángulos triedros de los poliedros también son mayores de los esperado en una geometría euclídea. Por ejemplo, si tenemos un cubo, cada uno de sus ángulos triedros en cada uno de sus vértices es ligeramente mayor que un octante.

• Geometría Euclídea: cuando $k_0 = 0$. El modelo simplemente conexo es $\mathbb{R}^3$. Por tanto, hay variedades compactas y variedades no compactas con este tipo de geometría. En una variedad con geometría el euclídea, los ángulos de los triángulos suman exactamente 2π, el área de una esfera de radio $r > 0$ es exactamente $\frac{4}{3}\pi r^2$ y los poliedros tienen el aspecto clásico que todos esperamos.

Como ejemplos de variedades compactas con geometría euclídea, tenemos el toro 3-dimensional $\mathbb{T}^3$. De hecho, el número de ejemplos compactos orientables es seis.

• Geometría Hiperbólica: cuando $k_0 < 0$. El modelo simplemente conexo es el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$. Se puede describir como la bola abierta unidad $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ con la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

En una variedad con geometría el hiperbólica, los ángulos de los triángulos suman menos de 2π, el área de una esfera de radio $r > 0$ alrededor de un punto es mayor que $\frac{4}{3}\pi r^2$ y los ángulos triedros de los poliedros también son menores de los esperado en una geometría euclídea.

Es difícil dar ejemplos de variedades compactas con geometría hiperbólica. Sin embargo, la mayor parte de las variedades con geometrías isotrópicas caen en este grupo. Recordemos que esto ocurre en analogía al caso de las superficies, donde la mayor parte de las mismas tenían geometrías hiperbólicas.

A diferencia de lo que ocurre con las superficies, no todas las 3-variedades admiten geometrías isotrópicas.

En determinados estudios de Cosmología, a veces, se restringe el estudio a variedades con un tipo de isotropía más fuerte que el que aquí hemos considerado. A estos espacios se les denomina espacios simétricos.

Definición 7.5 Un espacio M es simétrico si $\forall p$, $\forall u, v$ vectores tangentes en p, existe una isometría $\phi : M \to M$ con $\phi(p) = p$ y $d\phi_p(u) = v$.

En esta noción de isotropía, pedimos que la isometría ϕ sea una isometría **global**. Es decir, que si miramos la variedad M desde p, en cualquier dirección parezca la misma a cualquier distancia de p. Es una condición tan fuerte que implica la homogeneidad: dados p y q hay una isometría que lleva uno a otro. Para ello tomamos la geodésica de p a q y aplicamos la definición en su punto medio.

Las únicas variedades simétricas de dimensión 3 son la esfera $\mathbb{S}^3$, el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$, el plano $\mathbb{R}^3$ y el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^3$.

El Universo

En cuanto a nuestro universo, es razonable suponer los siguientes puntos:

• Es orientable. Los conceptos de derecha e izquierda tienen sentido, no solamente en el sitio en que nos encontramos, sino que se pueden definir en todos los puntos del Universo simultáneamente. Por ejemplo, el spin de un electrón no cambia si éste viaja por el Universo.

• Tiene una geometría isotrópica. Según la teoría de la relatividad general, la geometría del Universo viene determinada por la fuerza de gravedad en cada punto, es decir, por la distribución de materia. Las observaciones astronómicas revelan que la distribución de materia es aproximadamente la misma en todos los puntos y en todas las direcciones en las que miremos. Claro está que esta distribución no es completamente uniforme a pequeña escala, como lo muestra el hecho de que las estrellas se agrupen en galaxias, pero si que hay uniformidad a una escala mayor que la de las galaxias.

Debido a la isotropía, la densidad del Universo es una constante, que denotaremos por ρ.

El Universo se originó con una gran explosión (big-bang) hace unos 10 a 15 mil millones de años. En estos momentos, aún se encuentra en expansión. Debido a esto, la distancia entre las galaxias (y por tanto el tamaño del Universo) está aumentando. La velocidad de alejamiento es proporcional a la distancia entre ellas. La constante de proporcionalidad se llama constante de Hubble H y se calcula experimentalmente a través del corrimiento hacia el rojo de las líneas espectrales de las galaxias lejanas.

Cómo va a progresar nuestro universo es una incógnita. La cuestión es que esto depende del tipo de geometría isotrópica del mismo. Si la geometría es Elíptica, entonces el ritmo de expansión del Universo acabará por llegar a cero y éste comenzará a contraerse sobre sí mismo hasta llegar a una implosión (big-crunch). Si la geometría es Hiperbólica, en cambio, el ritmo de expansión del Universo, aunque decrece debido a las atracciones gravitatorias, siempre se mantendrá positivo (de hecho tenderá asintóticamente a un ritmo $r > 0$) y por tanto el Universo estará en eterna expansión. En el caso de que tenga una geometría Euclídea, el ritmo de expansión del Universo irá tendiendo a cero, aunque continuará creciendo para siempre.

El tipo de geometría del Universo viene determinado por la densidad de materia, dado que es la materia la que genera las fuerzas gravitatorias que pueden acabar contrayendo el Universo hasta un big-crunch o no. El resultado queda resumido en el siguiente cuadro

Geometría	Futuro del Universo	Densidad	Volumen
Elíptica	big-crunch	$\rho > \frac{3}{8\pi G}H^2$ (denso)	cerrado
Euclídea	ritmo de expansión tiende a cero	$\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2$	abierto o cerrado
Hiperbólica	expansión eterna	$\rho < \frac{3}{8\pi G}H^2$ (poco denso)	abierto o cerrado

(G es la constante de gravitación universal.)

Respecto a la pregunta de si el Universo es abierto o cerrado (es decir, si es compacto o no), se pueden hacer dos suposiciones

• La masa total del Universo es finita. La teoría de la relatividad asegura que la cantidad total de materia y energía se conserva. Por tanto esto nos induce a pensar que dicha cantidad debe ser finita (aunque sí que existe la posibilidad de que una cantidad infinita se conserve, esto no está muy de acuerdo con el entendimiento del infinito que tenemos hoy día). Como la densidad del Universo es constante, para que la masa sea finita, el volumen ha de ser finito, es decir el espacio sería un compacto.

• El Universo es un espacio simétrico. Es decir, cumple la condición de isotropía fuerte que dice que desde un punto el Universo se ve de forma global igual en cualquier dirección que miremos (aproximadamente). Como ya hemos comentado, esto obliga a que el Universo sea uno de los cuatro espacios $\mathbb{S}^3, \mathbb{P}^3, \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{H}^3$. Luego si la geometría del Universo es Euclídea o Hiperbólica, éste debería ser no compacto.

Estas dos suposiciones entran claramente en conflicto, aunque no hay en principio motivos (más allá de los filosóficos) para preferir una a la otra. Otro motivo filosófico para decantarnos por una de las geometrías puede ser el siguiente: dado que la mayor parte de las variedades compactas con geometría isotrópica son hiperbólicas, el Universo tiene más probabilidades de ser hiperbólico.

¿A qué conclusión llegan las observaciones realizadas? La geometría del Universo está intimamente ligada a su densidad ρ. Dicha densidad se puede medir contando la cantidad de galaxias y su masa, y esto se hace a través de la luz que despiden. El problema estriba en la masa que se encuentra en los agujeros negros, lo que se denomina la **materia oculta**. Dependiendo de cuanta materia oculta haya, la densidad ρ será tanto mayor de lo esperado. Hasta recientemente se ha creído que la geometría era hiperbólico, dado que la distribución de materia es muy poco densa, del orden de $0'3 \cdot \dfrac{3}{8\pi G}H^2$. Recientes descubrimientos (experimento Boomerang) revelan que el Universo está muy cerca de ser Euclído y que por tanto seguirá expandiéndose sin límite. Pero las observaciones corresponden a un porcentaje entre el 3% y 5% del Universo visible (y éste a su vez es una pequeñísima parte del total del Universo), con lo que el resultado no es concluyente.

Bibliografía

[1] E.A. Abott, Flatland: A romance of many dimensions, Dover, 1952.
[2] Clay Mathematics Institute http://www.claymath.org/prizeproblems/poincare.htm
[3] M.P. Do Carmo, Geometría Diferencial de curvas y superficies, Alianza Ed., 1990.
[4] W.S. Massey, Algebraic Topology: an Introduction, Graduate Texts in Maths, Vol. 56, Springer-Verlag, 1977.
[5] NASA, http://antwrp.gsfc.nasa.gov/
[6] H.J. Poincaré, Oeuvres, Tome VI, Paris, 1953.
[7] J.R. Weeks, The shape of space: How to visualize surfaces and three-dimensional manifolds, Marcel Dekker, 1985.
[8] Shape of Space, the Movie, http://www.geom.umn.edu/docs/forum/sos/
[9] http://www.henry-davis.com/MAPS/LMwebpages/LM1.html