

Homología y Solenoides

Vicente Muñoz

Universidad Complutense de Madrid

IMUS, 16 de mayo de 2012

Homología y Solenoides

- 1 Variedades
- 2 Homología y Cohomología
- 3 Representantes geométricos de clases de homología reales
- 4 Solenoides
- 5 Ergodicidad
- 6 Realización de clases de homología reales

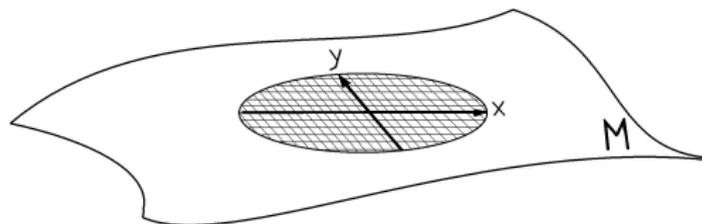
Variedades

Las **variedades** son el objeto principal de estudio en Geometría (diferencial). Su definición surge de la abstracción de la idea de espacio geométrico o físico.

Variedades

Las **variedades** son el objeto principal de estudio en Geometría (diferencial). Su definición surge de la abstracción de la idea de espacio geométrico o físico.

En una variedad, cada punto tiene un entorno coordenado.



Una variedad diferenciable es aquella en la que se puede realizar **cálculo** (diferenciar, integrar, etc.)

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).
- Entender distintas estructuras geométricas en una variedad: métricas riemannianas, estructuras complejas,
...

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).
- Entender distintas estructuras geométricas en una variedad: métricas riemannianas, estructuras complejas,
...
- Estudiar sub-objetos (subvariedades).

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).
- Entender distintas estructuras geométricas en una variedad: métricas riemannianas, estructuras complejas,
...
- Estudiar sub-objetos (subvariedades).
- Entender propiedades globales (topológicas) de las variedades.

Variedades y geometría

Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).
- Entender distintas estructuras geométricas en una variedad: métricas riemannianas, estructuras complejas,
...
- Estudiar sub-objetos (subvariedades).
- Entender propiedades globales (topológicas) de las variedades.

Variedades y geometría

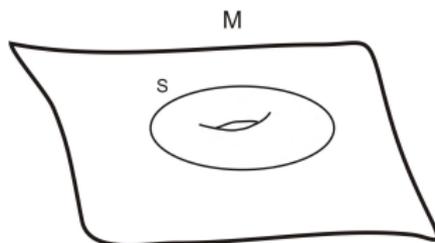
Las preguntas principales en geometría son las siguientes[†]:

- Clasificar variedades (diferenciables).
- Entender distintas estructuras geométricas en una variedad: métricas riemannianas, estructuras complejas, ...
- Estudiar sub-objetos (subvariedades).
- Entender propiedades globales (topológicas) de las variedades.

† Disclaimer: obviamente, esto es una visión personal.

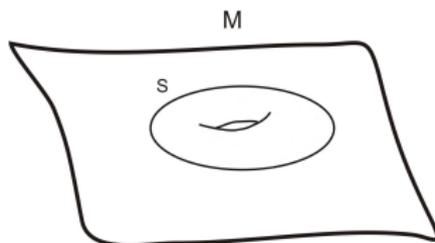
Subvariedades

Es natural estudiar subvariedades como inclusiones $S \hookrightarrow M$ de una variedad k -dimensional.



Subvariedades

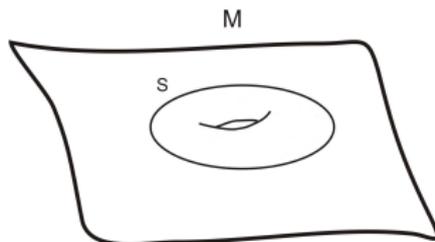
Es natural estudiar subvariedades como inclusiones $S \hookrightarrow M$ de una variedad k -dimensional.



Si permitimos mover S dentro de M tenemos las nociones de isotopía, homotopía, cobordismo, y podemos estudiar las clases de equivalencia a que dan lugar.

Subvariedades

Es natural estudiar subvariedades como inclusiones $S \hookrightarrow M$ de una variedad k -dimensional.



Si permitimos mover S dentro de M tenemos las nociones de isotopía, homotopía, cobordismo, y podemos estudiar las clases de equivalencia a que dan lugar.

No obstante, las teorías resultantes entrañan dificultades técnicas.

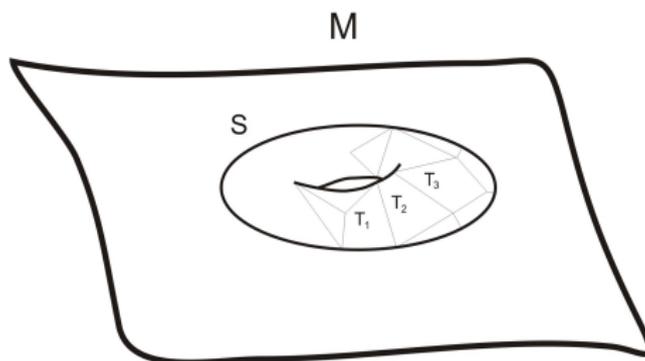
Homología

En 1896, Poincaré introdujo la **homología**, que es un invariante algebraico más fácil de calcular y con buenas propiedades.

Homología

En 1896, Poincaré introdujo la **homología**, que es un invariante algebraico más fácil de calcular y con buenas propiedades.

Triangulemos $S = \sum T_i$, con $T_i : [0, 1]^k \rightarrow M$.



Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos una aplicación borde

$$\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M).$$

Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos una aplicación borde

$$\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M).$$

■ Ciclos: $Z_k(M) = \{ a = \sum n_i T_i \mid \partial(a) = 0 \}.$

Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos una aplicación borde

$$\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M).$$

- Ciclos: $Z_k(M) = \{a = \sum n_i T_i \mid \partial(a) = 0\}$.
- Bordes: $B_k(M) = \{\partial(\sum m_j T'_j) \mid \sum m_j T'_j \in C_{k+1}(M)\}$.

Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos una aplicación borde

$$\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M).$$

- Ciclos: $Z_k(M) = \{a = \sum n_i T_i \mid \partial(a) = 0\}$.
- Bordes: $B_k(M) = \{\partial(\sum m_j T'_j) \mid \sum m_j T'_j \in C_{k+1}(M)\}$.

Homología

Definimos, por tanto, las k -cadenas como

$$C_k(M) = \left\{ \sum n_i T_i \mid T_i : [0, 1]^k \rightarrow M, n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tenemos una aplicación borde

$$\partial : C_k(M) \rightarrow C_{k-1}(M).$$

- Ciclos: $Z_k(M) = \{a = \sum n_i T_i \mid \partial(a) = 0\}$.
- Bordes: $B_k(M) = \{\partial(\sum m_j T'_j) \mid \sum m_j T'_j \in C_{k+1}(M)\}$.

La homología se define como

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = \frac{Z_k(M)}{B_k(M)}.$$

Homología

A toda subvariedad orientada compacta S , le corresponde un elemento

$$[S] \in H_k(M, \mathbb{Z}).$$

Homología

A toda subvariedad orientada compacta S , le corresponde un elemento

$$[S] \in H_k(M, \mathbb{Z}).$$

También tenemos una **homología real** $H_k(M, \mathbb{R})$, tomando coeficientes $n_i \in \mathbb{R}$ en la definición.

Formas diferenciales

De Rham (1931) estudió la siguiente dualidad producida en la homología, usando *integración*.

Formas diferenciales

De Rham (1931) estudió la siguiente dualidad producida en la homología, usando *integración*.

Sea $S \subset M$ una subvariedad orientada compacta. Tenemos:

$$\int_S : \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$\alpha \mapsto \int_S \alpha.$$

Formas diferenciales

De Rham (1931) estudió la siguiente dualidad producida en la homología, usando *integración*.

Sea $S \subset M$ una subvariedad orientada compacta. Tenemos:

$$\int_S : \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$\alpha \mapsto \int_S \alpha.$$

Tomando una k -forma $\alpha = \sum f_J dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}$, ponemos

$$\langle S, \alpha \rangle := \int_S \alpha = \sum n_i \int_{T_i} f_J dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k}.$$

Cohomología

El conjunto de formas, con la diferencial exterior,

$$\left(\bigoplus_k \Omega^k(M), d \right),$$

es un *álgebra diferencial*.

Cohomología

El conjunto de formas, con la diferencial exterior,

$$\left(\bigoplus_k \Omega^k(M), d \right),$$

es un *álgebra diferencial*. Tenemos

- **Formas cerradas:** $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$,

Cohomología

El conjunto de formas, con la diferencial exterior,

$$\left(\bigoplus_k \Omega^k(M), d \right),$$

es un *álgebra diferencial*. Tenemos

- **Formas cerradas:** $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$,
- **Formas exactas:** $B^k(M) = \text{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$.

Cohomología

El conjunto de formas, con la diferencial exterior,

$$\left(\bigoplus_k \Omega^k(M), d \right),$$

es un *álgebra diferencial*. Tenemos

- **Formas cerradas:** $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$,
- **Formas exactas:** $B^k(M) = \text{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$.

Cohomología

El conjunto de formas, con la diferencial exterior,

$$\left(\bigoplus_k \Omega^k(M), d \right),$$

es un *álgebra diferencial*. Tenemos

- Formas cerradas: $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$,
- Formas exactas: $B^k(M) = \text{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$.

La *cohomología de De Rham* se define como:

$$H^k(M, \mathbb{R}) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}.$$

Dualidad homología/cohomología

El teorema de Stokes se puede escribir como

$$\int_S d\beta = \int_{\partial S} \beta.$$

Dualidad homología/cohomología

El teorema de Stokes se puede escribir como

$$\int_S d\beta = \int_{\partial S} \beta.$$

Si S es una subvariedad compacta, no tiene borde, y por tanto, $\int_S d\beta = 0$. Por tanto, hay una aplicación bien definida

$$\begin{aligned} [S] : H^k(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ [\alpha] &\mapsto \langle [S], [\alpha] \rangle = \int_S \alpha. \end{aligned}$$

Dualidad homología/cohomología

El teorema de Stokes se puede escribir como

$$\int_S d\beta = \int_{\partial S} \beta.$$

Si S es una subvariedad compacta, no tiene borde, y por tanto, $\int_S d\beta = 0$. Por tanto, hay una aplicación bien definida

$$\begin{aligned} [S] : H^k(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ [\alpha] &\mapsto \langle [S], [\alpha] \rangle = \int_S \alpha. \end{aligned}$$

Tenemos una *dualidad*: $H_k(M, \mathbb{R}) \otimes H^k(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, es decir,

$$[S] \in \text{Hom}(H^k(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong H_k(M, \mathbb{R}).$$

A “ \int_S ” se le llama *corriente de integración a lo largo de S* .

Realización de clases de homología entera

Pregunta

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$, $0 < k < n$.
¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Realización de clases de homología entera

Pregunta

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$, $0 < k < n$.
¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Realización de clases de homología entera

Pregunta

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$, $0 < k < n$.

¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953, medalla Fields) dio la respuesta a esta pregunta.

Realización de clases de homología entera

Pregunta

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sea $a \in H_k(M, \mathbb{Z})$, $0 < k < n$.

¿Existe una subvariedad $S \subset M$ tal que $[S] = a$?

Thom (1953, medalla Fields) dio la respuesta a esta pregunta. Transformó el problema en un problema dual: la existencia de una aplicación,

$$f : M \longrightarrow U,$$

a algún espacio *universal* U con $U_0 \subset U$, tal que $S = f^{-1}(U_0)$ sea la subvariedad buscada. La aplicación f se obtiene con argumentos de transversalidad.

Realización de clases de homología entera

La respuesta de Thom dice, en particular, que:

- No siempre es posible encontrar una subvariedad S con $[S] = a$. Se requiere la existencia de una aplicación $f : M \rightarrow U$ tal que $f^*[U_0] = a$. Esto es una obstrucción topológica.

Realización de clases de homología entera

La respuesta de Thom dice, en particular, que:

- No siempre es posible encontrar una subvariedad S con $[S] = a$. Se requiere la existencia de una aplicación $f : M \rightarrow U$ tal que $f^*[U_0] = a$. Esto es una obstrucción topológica.
- La respuesta es positiva si se permite usar $m \gg 0$ y la clase $ma \in H_k(M)$. Es decir, existe $S \subset M$, con $[S] = ma$, $m \gg 0$.

Realización de clases de homología entera

La respuesta de Thom dice, en particular, que:

- No siempre es posible encontrar una subvariedad S con $[S] = a$. Se requiere la existencia de una aplicación $f : M \rightarrow U$ tal que $f^*[U_0] = a$. Esto es una obstrucción topológica.
- La respuesta es positiva si se permite usar $m \gg 0$ y la clase $ma \in H_k(M)$. Es decir, existe $S \subset M$, con $[S] = ma$, $m \gg 0$.
- Si $n - k$ es impar, $U = S^{n-k}$, $U_0 = pt$. Por tanto, $S = f^{-1}(pt)$, con fibrado normal trivial, $[S] = ma$, $m \gg 0$.

El caso complejo

Sea M una variedad compleja.

$M \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$, $M = Z(f_1, \dots, f_t)$, con $f_i(z_0, \dots, z_N)$ polinomios.

El caso complejo

Sea M una variedad compleja.

$M \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$, $M = Z(f_1, \dots, f_t)$, con $f_i(z_0, \dots, z_N)$ polinomios.

La cohomología tiene una *descomposición de Hodge*

$$H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

$$\text{Dualmente, } H_k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(M).$$

El caso complejo

Sea M una variedad compleja.

$M \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$, $M = Z(f_1, \dots, f_t)$, con $f_i(z_0, \dots, z_N)$ polinomios.

La cohomología tiene una *descomposición de Hodge*

$$H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

$$\text{Dualmente, } H_k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(M).$$

Si $S \subset M$ es una subvariedad *compleja* de dimensión (compleja) k , entonces $[S] \in H_{k,k}(M)$.

El caso complejo

Sea M una variedad compleja.

$M \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$, $M = Z(f_1, \dots, f_t)$, con $f_i(z_0, \dots, z_N)$ polinomios.

La cohomología tiene una *descomposición de Hodge*

$$H^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M).$$

$$\text{Dualmente, } H_k(M) = \bigoplus_{p+q=k} H_{p,q}(M).$$

Si $S \subset M$ es una subvariedad *compleja* de dimensión (compleja) k , entonces $[S] \in H_{k,k}(M)$.

Conjetura de Hodge (1950)

Dada $a \in H_{k,k}(M) \cap H_{2k}(M, \mathbb{Z})$. ¿Existe $m \gg 0$ y $S \subset M$ una subvariedad compleja con $[S] = m a$?

Representantes geométricos de clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable compacta.

Sea $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología *real*.

Representantes geométricos de clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable compacta.

Sea $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología *real*.

Nos gustaría encontrar *representantes geométricos* de a .

Representantes geométricos de clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable compacta.

Sea $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología *real*.

Nos gustaría encontrar *representantes geométricos* de a .

Es decir, buscamos un sub-objeto (diferenciable) $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

Representantes geométricos de clases de homología reales

Sea M una variedad diferenciable compacta.

Sea $a \in H_k(M, \mathbb{R})$ una clase de homología *real*.

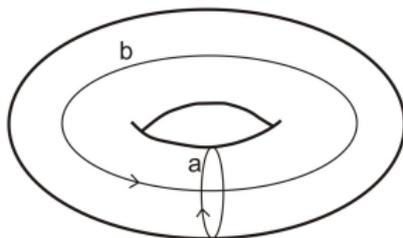
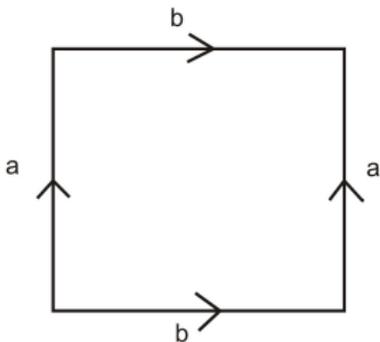
Nos gustaría encontrar *representantes geométricos* de a .

Es decir, buscamos un sub-objeto (diferenciable) $S \hookrightarrow M$ que defina una corriente de integración con $[S] = a$.

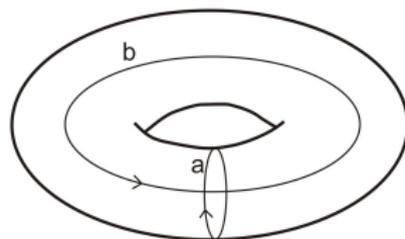
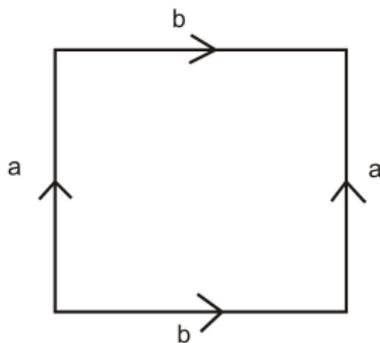
Nota

Por definición, existe una k -cadena con coeficientes reales $a = \sum \lambda_j C_j$. Pero esta cadena puede tener esquinas (y no ser alisable). Además, los *pesos* λ_j de cada una de las caras C_j son una información de tipo no-geométrico.

Modelo de juguete: el toro T^2

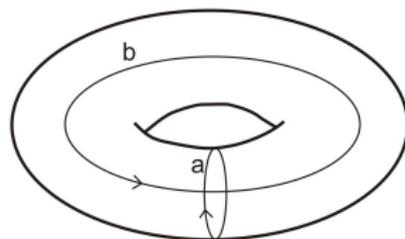
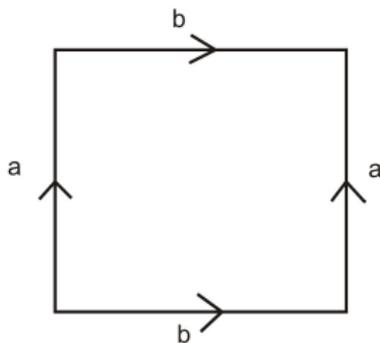


Modelo de juguete: el toro T^2



$$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot e_2$$

Modelo de juguete: el toro T^2



$$H_1(T^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cdot e_1 \oplus \mathbb{Z} \cdot e_2$$

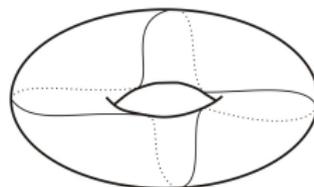
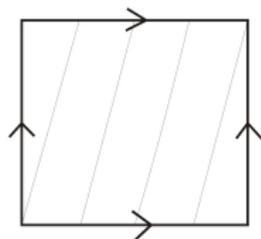
Modelo de juguete: el toro T^2

Sea $\alpha = n e_1 + m e_2$ una clase de homología.

Modelo de juguete: el toro T^2

Sea $\alpha = n e_1 + m e_2$ una clase de homología.

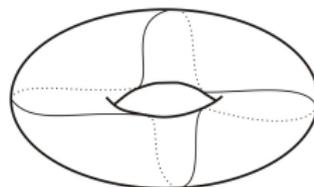
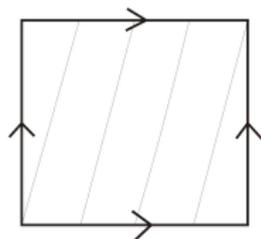
Tomamos $\alpha' = e_1 + \frac{m}{n} e_2$. Está representada por (la imagen de) la recta $y = \frac{m}{n} x$.



Modelo de juguete: el toro T^2

Sea $\alpha = n e_1 + m e_2$ una clase de homología.

Tomamos $\alpha' = e_1 + \frac{m}{n} e_2$. Está representada por (la imagen de) la recta $y = \frac{m}{n} x$.



Esta curva da n vueltas en la dirección horizontal, y m vueltas en la dirección vertical.

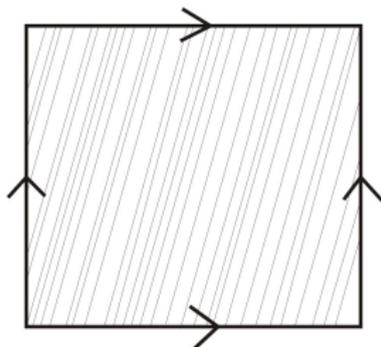
Modelo de juguete: el toro T^2

Tomemos ahora $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Modelo de juguete: el toro T^2

Tomemos ahora $\lambda \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

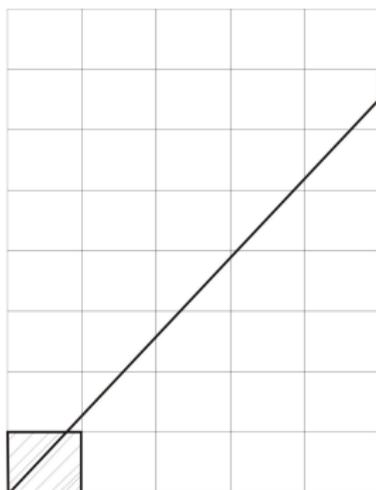
La recta $y = \lambda x$ nos da una curva *densa* en el toro, que nunca se cierra.



Modelo de juguete: el toro T^2

Consideramos trozos grandes de esta curva.

Sea $N \gg 0$, y tomamos $\gamma_N = \{(x, \lambda x) \mid x \in [0, N]\}$.



$$N = 5$$
$$p_N = 7$$

Modelo de juguete: el toro T^2

Aproximadamente, $[\gamma_N] \sim N \mathbf{e}_1 + p_N \mathbf{e}_2$, donde $\frac{p_N}{N} \sim \lambda$.

Por tanto,

$$\frac{1}{N}[\gamma_N] = [\mathbf{e}_1 + \frac{p_N}{N} \mathbf{e}_2] \longrightarrow [\mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2] \in H_1(T^2, \mathbb{R}).$$

Clases de Schwartzman

Sea M una variedad compacta. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \rightarrow M$$

define (bajo ciertas condiciones) una clase de homología real.

Clases de Schwartzman

Sea M una variedad compacta. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \rightarrow M$$

define (bajo ciertas condiciones) una clase de homología real. Para cada par de puntos $p, q \in M$, elegimos un arco *corto* $\gamma_{p,q}$ de p a q (p. ej., de longitud acotada).

Clases de Schwartzman

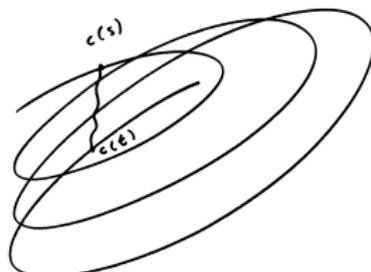
Sea M una variedad compacta. Una curva parametrizada

$$c : \mathbb{R} \rightarrow M$$

define (bajo ciertas condiciones) una clase de homología real. Para cada par de puntos $p, q \in M$, elegimos un arco *corto* $\gamma_{p,q}$ de p a q (p. ej., de longitud acotada). El lazo

$$c_{s,t} := c([s, t]) + \gamma_{c(t), c(s)}$$

define una clase de homología $[c_{s,t}] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.



Clases de Schwartzman

Si el límite

$$[c] = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{[C_{s,t}]}{t - s}$$

existe,

Clases de Schwartzman

Si el límite

$$[c] = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{[C_{s,t}]}{t-s}$$

existe, entonces c define un 1-ciclo *real*

$$[c] \in H_1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \otimes H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Clases de Schwartzman

Si el límite

$$[c] = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{[C_{s,t}]}{t-s}$$

existe, entonces c define un 1-ciclo *real*

$$[c] \in H_1(M, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \otimes H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Esto generaliza una definición de Schwartzman (1957).

Llamaremos a estos ciclos reales **ciclos de Schwartzman**.

Clases de Schwartzman

c define una corriente de integración

$$c : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Clases de Schwartzman

c define una corriente de integración

$$c : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Para una 1-form $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\langle [c_{s,t}], \alpha \rangle = \int_{c_{s,t}} \alpha = \int_{c([s,t])} \alpha + O(1) = \int_s^t \alpha(c'(u)) du + O(1).$$

Tomando el límite

$$\langle [c], \alpha \rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t \alpha(c'(u)) du.$$

Es decir, integramos a lo largo de $c([s, t])$, normalizamos, y tomamos el límite.

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Sea M una variedad diferenciable.

Sea S una variedad (Riemanniana) completa y no compacta,
 $x_0 \in S$.

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Sea M una variedad diferenciable.

Sea S una variedad (Riemanniana) completa y no compacta,
 $x_0 \in S$.

Una aplicación $f : S \rightarrow M$ define un k -ciclo de Schwartzman

$$[f] \in H_k(M, \mathbb{R})$$

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Sea M una variedad diferenciable.

Sea S una variedad (Riemanniana) completa y no compacta,
 $x_0 \in S$.

Una aplicación $f : S \rightarrow M$ define un k -ciclo de Schwartzman

$$[f] \in H_k(M, \mathbb{R})$$

si para cualquier $\omega \in \Omega^k(M)$, el límite

$$\langle [f], \omega \rangle := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{Vol}_S(B_R(x_0))} \int_{B_R(x_0)} f^* \omega$$

existe, donde $B_R(x_0)$ es la bola de radio R y centro x_0 en S .

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Alternativamente, si podemos *tapar* las subvariedades con borde $f(B_R(x_0))$ con una *pequeña* tapa C_R ,

$$S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R,$$

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Alternativamente, si podemos *tapar* las subvariedades con borde $f(B_R(x_0))$ con una *pequeña* tapa C_R ,

$$S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R,$$

entonces podemos definir

$$[f] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{[S_R]}{\text{Vol}_S(B_R(x_0))} \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

Clases de Schwartzman en dimensión superior

Alternativamente, si podemos *tapar* las subvariedades con borde $f(B_R(x_0))$ con una *pequeña* tapa C_R ,

$$S_R = f(B_R(x_0)) \cup C_R,$$

entonces podemos definir

$$[f] = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{[S_R]}{\text{Vol}_S(B_R(x_0))} \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

Esto ocurre, por ejemplo, cuando hay una *trapping region*, una bola $B \subset M$, tal que existen $R_n \rightarrow +\infty$, con

$$f(\partial B_{R_n}(x_0)) \subset B.$$

Solenoideos

Un k -solenoide es un espacio topológico compacto S con un atlas de *cajas de flujo* (U_i) tales que

$$U_i \cong D^k \times T_i.$$

Solenoideos

Un k -solenoide es un espacio topológico compacto S con un atlas de *cajas de flujo* (U_i) tales que

$$U_i \cong D^k \times T_i.$$

- Hojas (locales): $L_y = D^k \times \{y\}$.

Solenoides

Un k -solenoides es un espacio topológico compacto S con un atlas de *cajas de flujo* (U_i) tales que

$$U_i \cong D^k \times T_i.$$

- Hojas (locales): $L_y = D^k \times \{y\}$.
- Transversales (locales): T_i .

Solenoideos

Un k -solenoide es un espacio topológico compacto S con un atlas de *cajas de flujo* (U_i) tales que

$$U_i \cong D^k \times T_i.$$

- Hojas (locales): $L_y = D^k \times \{y\}$.
- Transversales (locales): T_i .

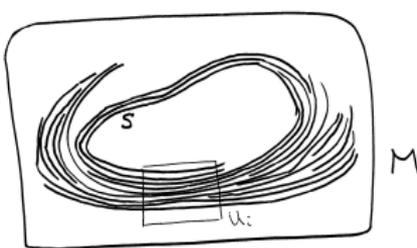
Solenoides

Un k -solenoides es un espacio topológico compacto S con un atlas de *cajas de flujo* (U_i) tales que

$$U_i \cong D^k \times T_i.$$

- Hojas (locales): $L_y = D^k \times \{y\}$.
- Transversales (locales): T_i .

Un solenoide inmerso es una aplicación $f : S \hookrightarrow M$ que es inmersión en cada hoja.



Corrientes de Ruelle-Sullivan

Un solenoide inmerso $f : S \rightarrow M$ define una corriente de integración

$$S : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Corrientes de Ruelle-Sullivan

Un solenoide inmerso $f : S \rightarrow M$ define una corriente de integración

$$S : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S , con $U_i = D^k \times T_i$, y (ρ_i) partición de la unidad subordinada.

Corrientes de Ruelle-Sullivan

Un solenoide inmerso $f : S \rightarrow M$ define una corriente de integración

$$S : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S , con $U_i = D^k \times T_i$, y (ρ_i) partición de la unidad subordinada.

Tomamos

$$\int_S \alpha = \sum_i \int_{U_i} \alpha_i,$$

donde $\alpha_i = \rho_i \cdot f^* \alpha$ tiene soporte en U_i .

Corrientes de Ruelle-Sullivan

Un solenoide inmerso $f : S \rightarrow M$ define una corriente de integración

$$S : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $\alpha \in \Omega^k(M)$. Fijamos un recubrimiento (U_i) de S , con $U_i = D^k \times T_i$, y (ρ_i) partición de la unidad subordinada.

Tomamos

$$\int_S \alpha = \sum_i \int_{U_i} \alpha_i,$$

donde $\alpha_i = \rho_i \cdot f^* \alpha$ tiene soporte en U_i . Integramos α_i a lo largo de las hojas

$$y \mapsto \int_{D^k \times \{y\}} \alpha_i(x, y) dx,$$

y luego en la dirección vertical.

Corrientes de Ruelle-Sullivan

Para realizar

$$\int_{U_i} \alpha_i = \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \alpha_i(x, y) dx \right) d\mu_{T_i}(y),$$

necesitamos una medida $\mu_{T_i}(y)$ en T_i .

Corrientes de Ruelle-Sullivan

Para realizar

$$\int_{U_i} \alpha_i = \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \alpha_i(x, y) dx \right) d\mu_{T_i}(y),$$

necesitamos una medida $\mu_{T_i}(y)$ en T_i .

Una **medida transversal** es una colección de medidas $\mu = (\mu_{T_i})$ para cada transversal T_i . Deben ser invariantes por la *holonomía* (las aplicaciones que van de una transversal a otra viajando a lo largo de hojas).

Ciclos de Ruelle-Sullivan

Sea $f : S \hookrightarrow M$ un solenoide orientado inmerso en M , con una medida transversal μ . Entonces tenemos una corriente de integración

$$\begin{aligned} f_*(S_\mu) : \Omega^k(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \sum_i \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \rho_i f^* \alpha \right) d\mu_{T_i}(y). \end{aligned}$$

Ciclos de Ruelle-Sullivan

Sea $f : S \hookrightarrow M$ un solenoide orientado inmerso en M , con una medida transversal μ . Entonces tenemos una corriente de integración

$$f_*(S_\mu) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \sum_i \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \rho_i f^* \alpha \right) d\mu_{T_i}(y).$$

Esta corriente define una clase de homología *real*

$$[f_*(S_\mu)] \in \text{Hom}(H^k(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = H_k(M, \mathbb{R}),$$

usando dualidad.

Ciclos de Ruelle-Sullivan

Sea $f : S \hookrightarrow M$ un solenoide orientado inmerso en M , con una medida transversal μ . Entonces tenemos una corriente de integración

$$f_*(S_\mu) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \sum_i \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \rho_i f^* \alpha \right) d\mu_{T_i}(y).$$

Esta corriente define una clase de homología *real*

$$[f_*(S_\mu)] \in \text{Hom}(H^k(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = H_k(M, \mathbb{R}),$$

usando dualidad.

Esta construcción generaliza ideas de Ruelle-Sullivan (1975).

Ciclos de Ruelle-Sullivan

Sea $f : S \hookrightarrow M$ un solenoide orientado inmerso en M , con una medida transversal μ . Entonces tenemos una corriente de integración

$$f_*(S_\mu) : \Omega^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \sum_i \int_{T_i} \left(\int_{D^k \times \{y\}} \rho_i f^* \alpha \right) d\mu_{T_i}(y).$$

Esta corriente define una clase de homología *real*

$$[f_*(S_\mu)] \in \text{Hom}(H^k(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) = H_k(M, \mathbb{R}),$$

usando dualidad.

Esta construcción generaliza ideas de Ruelle-Sullivan (1975).

Llamaremos a $[f_*(S_\mu)]$ **ciclo de Ruelle-Sullivan**.

Ergodicidad

Sea M una variedad diferenciable, y sean $e_1, e_2 \in H_k(M, \mathbb{Z})$ dados por subvariedades $S_1, S_2 \subset M$.

Ergodicidad

Sea M una variedad diferenciable, y sean $e_1, e_2 \in H_k(M, \mathbb{Z})$ dados por subvariedades $S_1, S_2 \subset M$.

Tomamos copias paralelas de S_1 y S_2 , que producen solenoides *triviales*

$$(\tilde{S}_1 = S_1 \times T_1, \mu_1), (\tilde{S}_2 = S_2 \times T_2, \mu_2).$$

Ergodicidad

Sea M una variedad diferenciable, y sean $e_1, e_2 \in H_k(M, \mathbb{Z})$ dados por subvariedades $S_1, S_2 \subset M$.

Tomamos copias paralelas de S_1 y S_2 , que producen solenoideos *triviales*

$$(\tilde{S}_1 = S_1 \times T_1, \mu_1), (\tilde{S}_2 = S_2 \times T_2, \mu_2).$$

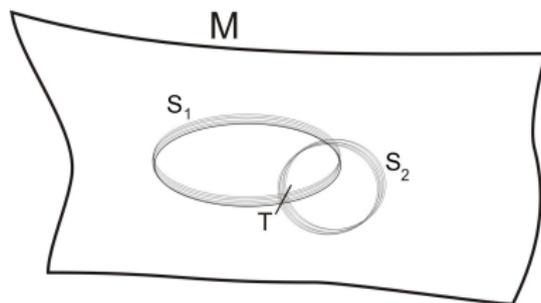
Consideremos la clase

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

Ergodicidad

Si tomamos $\mu_i(T_1) = \lambda_1$, $\mu_i(T_2) = \lambda_2$, el solenoide

$$(\mathcal{S}, \mu) = (\tilde{\mathcal{S}}_1, \mu_1) \sqcup (\tilde{\mathcal{S}}_2, \mu_2)$$

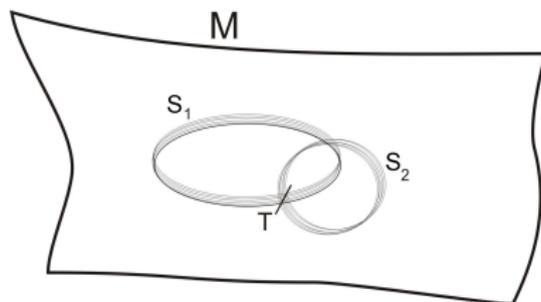


representa a,

Ergodicidad

Si tomamos $\mu_i(T_1) = \lambda_1$, $\mu_i(T_2) = \lambda_2$, el solenoide

$$(S, \mu) = (\tilde{S}_1, \mu_1) \sqcup (\tilde{S}_2, \mu_2)$$



representa a , pero *ninguna* hoja de S representa a .

Ergodicidad

Para arreglar este fenómeno, necesitamos cierto *mixing* en la holonomía.

Ergodicidad

Para arreglar este fenómeno, necesitamos cierto *mixing* en la holonomía.

Un k -solenoide S es:

- **minimal** si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).

Ergodicidad

Para arreglar este fenómeno, necesitamos cierto *mixing* en la holonomía.

Un k -solenoide S es:

- **minimal** si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).
- **únicamente ergódico** si S admite una única medida transversa μ (salvo multiplicación por un escalar positivo cualquiera) y $\text{Sop } \mu = S$.

Ergodicidad

Para arreglar este fenómeno, necesitamos cierto *mixing* en la holonomía.

Un k -solenoide S es:

- **minimal** si todas las hojas son densas (en particular, cualquier transversal corta todas las hojas).
- **únicamente ergódico** si S admite una única medida transversal μ (salvo multiplicación por un escalar positivo cualquiera) y $\text{Sop } \mu = S$.
- **ergódico** si para cualquier transversal T y conjunto $A \subset T$ invariante por la holonomía,

$$\mu_T(A) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu_T(T - A) = 0.$$

Solenoideos ergódicos

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k -volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Solenoides ergódicos

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k -volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Para un solenoide únicamente ergódico, S “contiene” la información de la medida μ . Por tanto S determina S_μ .

Solenoideos ergódicos

Si dotamos a S de una métrica Riemanniana, y por tanto, de un k -volumen a lo largo de las hojas, entonces μ puede ser normalizada para dar volumen total 1 a todo el solenoide.

Para un solenoide únicamente ergódico, S “contiene” la información de la medida μ . Por tanto S determina S_μ .

Un solenoide únicamente ergódico es un objeto geométrico. (En general, un solenoide con una medida transversa consta de un dato geométrico, S , y de un dato no-geométrico, μ , un *peso*.)

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea S un k -solenoido orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \rightarrow M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $I \subset S$ tenemos que $f|_I : I \rightarrow M$ es un k -ciclo de Schwartzman, y que

$$[f|_I] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea S un k -solenoides orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \rightarrow M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $I \subset S$ tenemos que $f|_I : I \rightarrow M$ es un k -ciclo de Schwartzman, y que

$$[f|_I] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

Relación entre ciclos de Schwartzman y de Ruelle-Sullivan

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea S un k -solenoido orientado y *únicamente ergódico*, y sea $f : S \rightarrow M$ una inmersión. (Si $k > 1$ asumimos que hay una trapping region.) Entonces para cada hoja $I \subset S$ tenemos que $f|_I : I \rightarrow M$ es un k -ciclo de Schwartzman, y que

$$[f|_I] = [f_* S_\mu] \in H_k(M, \mathbb{R}).$$

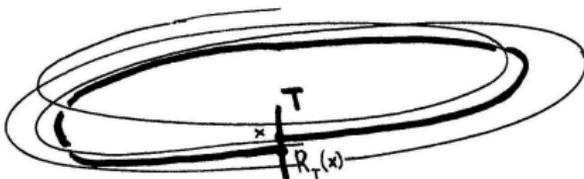
Demostración.

El resultado es una aplicación del teorema ergódico de Birkhoff.

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \rightarrow S$.

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \rightarrow S$. Elegimos una transversal local T .

Asumamos por simplicidad que $k = 1$, con lo que la hoja l es una curva parametrizada (por la longitud de arco) $c : \mathbb{R} \rightarrow S$. Elegimos una transversal local T .
Sea $R_T : T \rightarrow T$, la aplicación de retorno de Poincaré.



Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i .

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i .
Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i).$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i .
Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i).$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0)).$$

Fijemos $x_0 \in T$. Sea $x_i = R_T^i(x_0)$ con tiempo de llegada t_i .
Claramente,

$$t_{i+1} - t_i = l_T(x_i).$$

Por tanto,

$$t_n = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} l_T(R_T^i(x_0)).$$

Por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} t_n = \int_T l_T(x) d\mu_T(x) = \mu(\mathbf{S}) = 1. \quad (1)$$

También,

$$\begin{aligned} [f \circ c_{0,t_n}] &= [f \circ c_{0,t_1}] + [f \circ c_{t_1,t_2}] + \dots + [f \circ c_{t_{n-1},t_n}] \\ &= \varphi_T(x_0) + \varphi_T(R_T(x_0)) + \dots + \varphi_T(R_T^{n-1}(x_0)). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} [f \circ c_{0,t_n}] &= [f \circ c_{0,t_1}] + [f \circ c_{t_1,t_2}] + \dots + [f \circ c_{t_{n-1},t_n}] \\ &= \varphi_T(x_0) + \varphi_T(R_T(x_0)) + \dots + \varphi_T(R_T^{n-1}(x_0)). \end{aligned}$$

De nuevo, por el teorema ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} [f \circ c_{0,t_n}] = \int_T \varphi_T(x) d\mu_T(x) \in H_1(M, \mathbb{R}). \quad (2)$$

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es (tomamos $t \rightarrow \infty$; podemos tomar $s \rightarrow -\infty$ de forma similar):

$$[f|_I] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x) d\mu_T(x).$$

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es (tomamos $t \rightarrow \infty$; podemos tomar $s \rightarrow -\infty$ de forma similar):

$$[f|_I] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x) d\mu_T(x).$$

Por otro lado, la clase de Ruelle-Sullivan es

$$\langle [f_* S_\mu], \omega \rangle = \int_T \left(\int_{[x, R_T(x)]} f^* \omega \right) d\mu_T(x) = \int_T \langle \varphi_T(x), \omega \rangle d\mu_T(x),$$

para $\omega \in \Omega^1(M)$.

Juntando (1) y (2), la clase de Schwartzman es (tomamos $t \rightarrow \infty$; podemos tomar $s \rightarrow -\infty$ de forma similar):

$$[f|_I] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]}{t_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f \circ c_{0,t_n}]/n}{t_n/n} = \int_T \varphi_T(x) d\mu_T(x).$$

Por otro lado, la clase de Ruelle-Sullivan es

$$\langle [f_* S_\mu], \omega \rangle = \int_T \left(\int_{[x, R_T(x)]} f^* \omega \right) d\mu_T(x) = \int_T \langle \varphi_T(x), \omega \rangle d\mu_T(x),$$

para $\omega \in \Omega^1(M)$. Luego

$$[f_* S_\mu] = \int_T \varphi_T(x) d\mu_T(x).$$

Realización de clases de homología reales

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea M una variedad compacta y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$. Entonces existe un k -solenoides inmerso, orientado y únicamente ergódico $f : S \rightarrow M$ representando la clase a . (Si $k > 1$ además podemos construir S con una trapping region.)

Realización de clases de homología reales

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea M una variedad compacta y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$. Entonces existe un k -solenoides inmerso, orientado y únicamente ergódico $f : S \rightarrow M$ representando la clase a . (Si $k > 1$ además podemos construir S con una trapping region.)

Realización de clases de homología reales

Teorema (M–Pérez-Marco)

Sea M una variedad compacta y $a \in H_k(M, \mathbb{R})$. Entonces existe un k -solenoides inmerso, orientado y únicamente ergódico $f : S \rightarrow M$ representando la clase a . (Si $k > 1$ además podemos construir S con una trapping region.)

Demostración.

Asumamos de nuevo $k = 1$ por simplicidad.

Realización de clases de homología reales

Vamos a construir un solenoide requerido con transversal $T \subset S^1$.

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ , i.e.
 $r_\theta^n(x) = x + n\theta, h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ , i.e.
 $r_\theta^n(x) = x + n\theta, h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K .

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

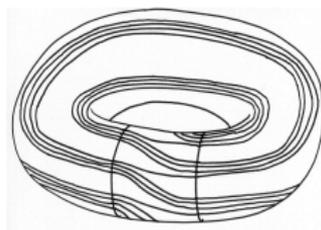
- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ , i.e.
 $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K .

Ejemplo de Denjoy

Hay una aplicación $h : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

- h es de clase $C^{2-\epsilon}$.
- h deja invariante un conjunto de Cantor $K \subset S^1$.
- h tiene ángulo de rotación θ , i.e.
 $r_\theta^n(x) = x + n\theta$, $h^n(x) = x + n\theta + o(n)$.
- h es únicamente ergódica, con una única medida invariante μ_K soportada en K .

La suspensión Σ_h de $h|_K : K \rightarrow K$ es:



Tomemos lazos $C_1, \dots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

Tomemos lazos $C_1, \dots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Hay números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ tales que

$$a = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r$$

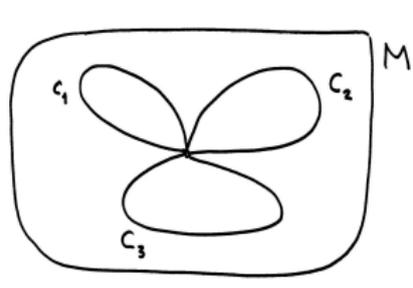
(cambiando orientaciones y reordenando la base, si fuera necesario).

Tomemos lazos $C_1, \dots, C_{b_1} \subset M$ que formen una base de $H_1(M, \mathbb{Z})$. Hay números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ tales que

$$a = \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r$$

(cambiando orientaciones y reordenando la base, si fuera necesario).

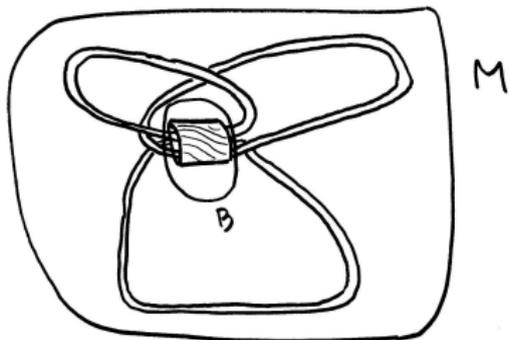
Dividiendo por $\sum \lambda_i$, podemos asumir que $\sum \lambda_i = 1$.



Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0, 1] \subset B$ en una bola de M .

Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0, 1] \subset B$ en una bola de M . Partimos el conjunto de Cantor K en r conjuntos cerrados disjuntos K_1, \dots, K_r (en orden cíclico), tales que $\mu_K(K_i) = \lambda_i$.

Supongamos que $\dim M \geq 3$. Podemos embeber $S^1 \times [0, 1] \subset B$ en una bola de M . Partimos el conjunto de Cantor K en r conjuntos cerrados disjuntos K_1, \dots, K_r (en orden cíclico), tales que $\mu_K(K_i) = \lambda_i$. Hacemos la siguiente construcción: la parte central de Σ_h la enviamos a la bola B . Desde su borde, tomamos bandas $[0, 1] \times K_i$ tales que cada hoja $[0, 1] \times \{y\}$ es homotópica a C_i .



El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

Veamos que $[f_*(S_\mu)] = a$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

Veamos que $[f_*(S_\mu)] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B).

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

Veamos que $[f_*(S_\mu)] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0, 1] \times K_i$, $i = 1, \dots, r$.

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

Veamos que $[f_*(S_\mu)] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0, 1] \times K_i$, $i = 1, \dots, r$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f_*(S_\mu), \omega \rangle &= \sum_{i=1}^r \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^r \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle. \end{aligned}$$

El solenoide resultante S es únicamente ergódico, pues la holonomía es h .

Veamos que $[f_*(S_\mu)] = a$. Sea ω una 1-forma cerrada (podemos asumir que ω se anula en B). Recubramos el solenoide con las siguientes cajas: por un lado la parte central $B \cap S$, y por otro las bandas $[0, 1] \times K_i$, $i = 1, \dots, r$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f_*(S_\mu), \omega \rangle &= \sum_{i=1}^r \int_{K_i} \left(\int_{[0,1]} f^* \omega \right) d\mu_{K_i}(y) = \sum_{i=1}^r \int_{K_i} \langle C_i, [\omega] \rangle d\mu_{K_i}(y) \\ &= \sum_{i=1}^r \langle C_i, [\omega] \rangle \mu(K_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle C_i, [\omega] \rangle = \langle a, [\omega] \rangle. \end{aligned}$$

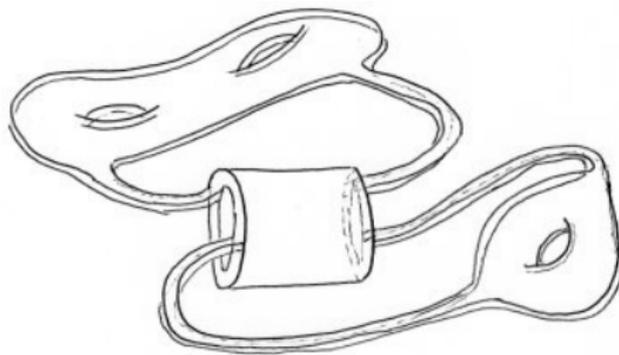
Luego $[f_*(S_\mu)] = a$.

Si $k > 1$, usamos subvariedades

$$C_j \subset M$$

representando clases de homología entera, que den una base de $H_k(M, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \otimes H_k(M, \mathbb{Z})$, y una parte central (donde ocurre la holonomía) de la forma

$$S^{k-1} \times S^1 \times [0, 1] \subset B \subset M.$$



Densidad de las corrientes solenoidales

Teorema

Sea M una variedad compacta y $\alpha \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Entonces existe un solenoide orientado, únicamente ergódico, inmerso $f : S_\mu \rightarrow M$ con $[f_*(S_\mu)] = [\alpha]$, y tal que la corriente $f_*(S_\mu)$ está tan próxima a α como queramos (como funcionales, con la topología débil).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H_{k,k}(M) \cap H_{2k}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H_{k,k}(M) \cap H_{2k}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H_{k,k}(M) \cap H_{2k}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).

Conjetura de Hodge solenoidal

Conjetura

Sea M una variedad compacta Kähler, y $a \in H_{k,k}(M) \cap H_{2k}(M, \mathbb{R})$. Entonces a se puede representar por un solenoide complejo inmerso.

Comentarios:

- Es una mitad de la conjetura de Hodge (la segunda parte consiste en probar que si a es entera, entonces el solenoide es una variedad).
- No tenemos ahora la restricción de que M sea una variedad proyectiva (es decir, que la forma Kähler verifique que $[\Omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$).

Referencias

- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Ergodic solenoids and generalized currents, *Revista Mat. Complutense*, 24 (2011) 493-525.
- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Schwartzman cycles and ergodic solenoids, *Essays in Mathematics and its Applications. Dedicated to Stephen Smale*, Springer.
- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Ergodic solenoidal homology: Realization theorem, *Comm. Math. Physics*, 302 (2011) 737-753.
- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Ergodic solenoidal homology: Density of ergodic solenoids, *Australian J. Math. Analysis and Appl.* 6 (2009), article 1.
- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Intersection theory for ergodic solenoids, *Frontiers in Complex Dynamics, Proceedings of a Conference in honor of John Milnor's 80th birthday*.
- V. Muñoz, R. Pérez-Marco, Hodge theory for Riemannian solenoids, *Functional Equations in Mathematical Analysis. A volume Dedicated to the 100th Anniversary of S. M. Ulam*, Springer.