Introductio in Analysin Infinitorum de Leonhard Euler

Ángeles Prieto

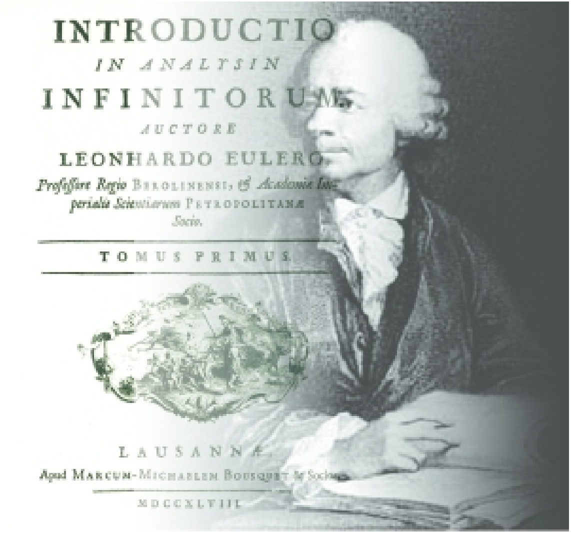
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

SEMINARIO DE IDEAS Y VISUALIZACIONES MATEMÁTICAS

Madrid, 17/06/2010

Esquema

1. Antes de hablar del contenido
2. Los primeros capítulos
3. Funciones trascendentes
4. Epílogo


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM
AUCTORE
LEONHARDO EULERO
Professore Regio BEROLINENSI, & Academiae Imperialis Scientiarum PETROPOLITANAE
Socio.
TOMUS PRIMUS
LAUSANNAE
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLVIII.

¿Por qué el texto?

En una carta a Goldbach (1744), Euler explica que antes de escribir un manual sobre Cálculo Infinitesimal ha considerado que debía desarrollar una serie de temas que preceden a éste, relativos a los infinitos, necesarios para la comprensión del cálculo. El libro, pendiente de publicación, anuncia que está dedicado al Álgebra y Geometría Superiores e incluye la solución de muchos problemas nuevos sin usar técnicas de cálculo infinitesimal, en lo que debe considerarse un prólogo a éste.

¿Cómo presenta Euler el libro? I

El libro consta de dos volúmenes. El primero está dedicado a funciones y el segundo, a geometría.

Nos centraremos en el primer tomo. Está comúnmente admitido que el primer volumen es una obra clave entre los manuales de Análisis.

Sin embargo, el segundo volumen no ha resistido con igual lozanía el paso de los siglos. En esta segunda parte se considera la Geometría como el sujeto al que se aplican los infinitos estudiados en el primer tomo.

¿Cómo presenta Euler el libro? II

Euler considera que los métodos principales desarrollados no son conocidos por el lector, porque no están disponibles (por ser inéditos o no estar sistematizados en un texto). Están dirigidos a personas con conocimientos elementales de funciones, un material accesible en otros manuales.

Para conseguir una comprensión adecuada de lo expuesto, Euler apuesta por el método *genético*. Expone el procedimiento general para resolver un problema (transformaciones de funciones; cambios de variable(s); desarrollos en series o productos finitos/infinitos; etc.) y lo ilustra con ejemplos concretos. Estos ejemplos contienen toda la información que se precisa para aplicar el método, por concentrar lo esencial de las leyes que rigen la construcción presentada.

¿Cómo presenta Euler el libro? III

Euler planifica cuidadosamente el contenido del manual.

Los capítulos siguen un orden en el que las técnicas y procedimientos expuestos se enriquecen al ser utilizados en los siguientes. Euler alude a usos posteriores y, más frecuentemente, rescata las ideas desarrolladas previamente para presentar estrategias novedosas.

¿Cómo presenta Euler el libro? III

Euler planifica cuidadosamente el contenido del manual.

Los capítulos siguen un orden en el que las técnicas y procedimientos expuestos se enriquecen al ser utilizados en los siguientes. Euler alude a usos posteriores y, más frecuentemente, rescata las ideas desarrolladas previamente para presentar estrategias novedosas.

Joan Margarit

Un buen poema es la parte visible de un iceberg que debe su equilibrio a su parte más profunda y oculta, formada por sustancias artísticas anteriores, a veces próximas, a veces muy antiguas.

Estructura de Introductio

Está presentado en dieciocho capítulos, escrito en un lenguaje matemático que resulta esencialmente actual. Euler no escribe como nosotros, sino que nosotros escribimos como Euler.

Multitud de notaciones actuales son propuestas por Euler en esta obra, o bien se consolidan gracias al profundo impacto que tuvo desde su publicación.

Ante la pregunta ¿Qué decir sobre Introductio a un estudiante de matemáticas? la respuesta natural es

Estructura de Introductio

Está presentado en dieciocho capítulos, escrito en un lenguaje matemático que resulta esencialmente actual. Euler no escribe como nosotros, sino que nosotros escribimos como Euler.

Multitud de notaciones actuales son propuestas por Euler en esta obra, o bien se consolidan gracias al profundo impacto que tuvo desde su publicación.

Ante la pregunta ¿Qué decir sobre Introductio a un estudiante de matemáticas? la respuesta natural es

P.S. Laplace

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

Capítulo primero, I

Es de naturaleza taxonómica. Propone una clasificación de las funciones.

- Algebraicas/ trascendentes. Dentro de las primeras, racionales e irracionales. Entre las racionales, distingue enteras y fraccionarias. En las irracionales, entre explícitas, que involucran radicales, e implícitas.

Capítulo primero, I

Es de naturaleza taxonómica. Propone una clasificación de las funciones.

- Algebraicas/ trascendentes. Dentro de las primeras, racionales e irracionales. Entre las racionales, distingue enteras y fraccionarias. En las irracionales, entre explícitas, que involucran radicales, e implícitas.
- Uniformes y multiformes. La naturaleza multiforme de algunas funciones está impuesta por su presentación implícita.

Capítulo primero, y II

- Analiza las variables; en particular, la dependencia e independencia de las mismas.

Capítulo primero, y II

- Analiza las variables; en particular, la dependencia e independencia de las mismas.

- Estudia el problema de la paridad/imparidad, siempre desde un punto de vista analítico, sin alusiones a las propiedades geométricas asociadas.

Capítulo segundo

Es de naturaleza instrumental. Presenta la descomposición de polinomios como producto de factores simples (los correspondientes a raíces reales) o dobles (raíces imaginarias).

Capítulo segundo

Es de naturaleza instrumental. Presenta la descomposición de polinomios como producto de factores simples (los correspondientes a raíces reales) o dobles (raíces imaginarias).

Euler asegura que es posible descomponer de esta manera los polinomios, pero no intenta hacer una demostración del Teorema Fundamental del Álgebra. No pasa de una aproximación discursiva al resultado.

Capítulo segundo

Es de naturaleza instrumental. Presenta la descomposición de polinomios como producto de factores simples (los correspondientes a raíces reales) o dobles (raíces imaginarias).

Euler asegura que es posible descomponer de esta manera los polinomios, pero no intenta hacer una demostración del Teorema Fundamental del Álgebra. No pasa de una aproximación discursiva al resultado.

También hace una referencia al teorema de Bolzano, con argumentos relativamente geométricos.

Capítulo segundo

Es de naturaleza instrumental. Presenta la descomposición de polinomios como producto de factores simples (los correspondientes a raíces reales) o dobles (raíces imaginarias).

Euler asegura que es posible descomponer de esta manera los polinomios, pero no intenta hacer una demostración del Teorema Fundamental del Álgebra. No pasa de una aproximación discursiva al resultado.

También hace una referencia al teorema de Bolzano, con argumentos relativamente geométricos.

Anuncia la conveniencia de dominar estas técnicas de cara a la integración de funciones racionales que se tratará en el manual sobre cálculo infinitesimal al que precede *Introductio*.

Capítulo tercero

Se trata, como el precedente, de un capítulo instrumental. Está centrado en el uso de sustituciones que permiten expresiones más sencillas de las funciones consideradas.

Por ejemplo, para obtener con respecto a la nueva variable una expresión racional de una función irracional

$$y = \sqrt{a + bz}$$

Se convierte en la función $y = bx$ cuando se realiza el cambio

$$z = bxx - \frac{a}{b}.$$

Euler explica cómo conseguir expresiones racionales, tras un cambio de variable, de funciones irracionales definidas implícitamente (por un polinomio en dos variables).

Capítulo cuarto, I

Está dedicado a la expresión de funciones racionales e irracionales como series. Euler aboga por obtener estos desarrollos con el fin de conseguir *una mejor comprensión de la naturaleza de las funciones, incluso las trascendentes*. Ilustremos con un ejemplo cómo conseguir el desarrollo en serie de una función racional sencilla, igualando coeficientes:

$$\frac{1+2z}{1-z-zz} = A + Bz + Czz + Dz^3 + Ez^4 + \&c.$$

Ha de tenerse que $A = 1$, $B = 3$ y los coeficientes posteriores verifican

$$C = B + A, D = C + B, E = D + C, ...$$

por lo que la fracción propuesta se muda en la serie infinita

$$1 + 3z + 4zz + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \&c.$$

Capítulo cuarto, II

Euler utiliza la fórmula del binomio de Newton para coeficientes racionales, a la que se refiere como *un teorema*. Realmente Newton no lo demostró, Euler tampoco ¡a pesar del uso *transgresor* que hizo de él! Fue Abel quien lo probó por primera vez en 1826.

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \&c.$$

de no ser m/n un número afirmativo, esos términos discurren hasta el infinito.

[Es frecuente el uso del término afirmativo como opuesto a negativo, en lugar del actual positivo]

Capítulo cuarto, y III

Euler presenta como series otras funciones racionales en las que el denominador es una potencia de un binomio o, en general, de un polinomio. Para ellas sistematiza cómo obtener los coeficientes, pero reconoce que se trata de una acumulación de ejemplos representativos (y, en muchos casos, herramientas concretas para los desarrollos de capítulos posteriores).

En el párrafo final del capítulo reflexiona sobre la verificación casi experimental que supone el surtido de ejemplos significativos que maneja, aunque reconoce que los principios del cálculo diferencial serán los que proporcionen una *demostración matemática*.

Capítulo quinto

En este capítulo se presentan las funciones de varias variables, clasificándolas según el tipo (algebraicas/trascendentes, racionales/irracionales, enteras/fraccionarias... uniformes/multiformes).

Capítulo quinto

En este capítulo se presentan las funciones de varias variables, clasificándolas según el tipo (algebraicas/trascendentes, racionales/irracionales, enteras/fraccionarias... uniformes/multiformes).

Se muestra cómo distinguir las variables dependientes de las independientes.

Capítulo quinto

En este capítulo se presentan las funciones de varias variables, clasificándolas según el tipo (algebraicas/trascendentes, racionales/irracionales, enteras/fraccionarias... uniformes/multiformes).

Se muestra cómo distinguir las variables dependientes de las independientes.

Se introduce la noción de homogeneidad (con grados que pueden ser negativos o fraccionarios) y se estudia cómo convertir, mediante un cambio de variable, una función heterogénea en homogénea.

Capítulo quinto

En este capítulo se presentan las funciones de varias variables, clasificándolas según el tipo (algebraicas/trascendentes, racionales/irracionales, enteras/fraccionarias... uniformes/multiformes).

Se muestra cómo distinguir las variables dependientes de las independientes.

Se introduce la noción de homogeneidad (con grados que pueden ser negativos o fraccionarios) y se estudia cómo convertir, mediante un cambio de variable, una función heterogénea en homogénea.

Una razón que lleva a Euler a tratar la homogeneidad es la posibilidad de factorizarla como producto de expresiones lineales del tipo $\alpha y + \beta z$.

Capítulo sexto

Aun cuando la noción de funciones trascendentes dependa justamente del cálculo integral, antes de entrar en materia conviene desarrollar algunas de sus especies que franquean el paso a investigaciones diversas.

De esta manera justifica Euler la introducción de las funciones exponenciales y logaritmos. Comienza con un repaso de las funciones a^z, $a > 0$ (bien conocidas para valores de z enteros y racionales). Y continúa definiendo el logaritmo (en base a) como inversa de la exponencial. Expone las reglas básicas de los logaritmos, que alentaron su desarrollo en el campo de la astronomía para hacer accesibles cálculos engorrosos.

Capítulo séptimo, I

En este capítulo, Euler opta por manejar el infinito de hecho, separándose de la restricción aristotélica de utilizar únicamente el infinito potencial.

Aquí aparecen los dos infinitos que dan título al texto que analizamos: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Euler manipula ambos como si de números (reales) se tratara.

Capítulo séptimo, I

En este capítulo, Euler opta por manejar el infinito de hecho, separándose de la restricción aristotélica de utilizar únicamente el infinito potencial.

Aquí aparecen los dos infinitos que dan título al texto que analizamos: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Euler manipula ambos como si de números (reales) se tratara.

Manipular

Intervenir con medios hábiles y, a veces, arteros, en la política, en el mercado, en la información, etc., con distorsión de la verdad o la justicia, y al servicio de intereses particulares.

Capítulo séptimo, I

En este capítulo, Euler opta por manejar el infinito de hecho, separándose de la restricción aristotélica de utilizar únicamente el infinito potencial.

Aquí aparecen los dos infinitos que dan título al texto que analizamos: lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Euler manipula ambos como si de números (reales) se tratara.

Manipular

Intervenir con medios hábiles y, a veces, arteros, en la política, en el mercado, en la información, etc., con distorsión de la verdad o la justicia, y al servicio de intereses particulares.

Intervenir con medios hábiles y, a veces, arteros (astutos) al servicio de intereses particulares.

Capítulo séptimo, II

Si ω es un número infinitamente pequeño, tanto que $a^\omega = 1 + \psi$, donde ψ es igualmente un número infinitamente pequeño. Ambos serán o bien iguales o uno mayor que otro, por lo que podemos asegurar la existencia de una cantidad fija k, dependiente sólo de a, tal que $a^\omega = 1 + k\omega$. Así, $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, para cualquier i.

La fórmula del binomio de Newton permite escribir

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1\,2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1\,2\,3}k^3\omega^3 + \&c.$$

para i infinitamente grande. Al sustituir ω por z/i,

$$a^z = (1 + \frac{kz}{i})^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1\,2i}k^2z^2 +$$

$$\frac{1(i-1)(i-2)}{1\,2i\,3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\,2i\,3i\,4i}k^4z^4 + \&c.$$

Capítulo séptimo, III

En este punto, Euler observa que por ser i un número infinitamente grande, el cociente $\frac{i-1}{i} = 1$ y, de manera similar, $\frac{i-m}{i} = 1$, para cada m.

La serie anterior queda entonces reducida a

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\,2} + \frac{k^3z^3}{1\,2\,3} + \frac{k^4z^4}{1\,2\,3\,4} + \&c.$$

donde la constante k anunciada es finalmente el logaritmo de a. Para $a = e$, la constante es 1 y se obtiene la serie de la exponencial.

Euler había introducido a finales de los años 20 la notación e, describiéndolo como el número cuyo *logaritmo hiperbólico* es 1. Es decir, haciendo la cuadratura de la hipérbola, se obtiene que

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1.$$

Capítulo séptimo, y IV

Manipulaciones análogas le permiten obtener la serie de logaritmo (para cualquier base a; de nuevo, k es el logaritmo hiperbólico de a)

$$l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.\right)$$

Euler está todavía muy lejos de plantearse de manera sistemática la noción de *dominio de convergencia* de una serie. Comenta la paradoja de obtener el logaritmo de 10 como la serie anterior con término general

$$(-1)^{m+1}\frac{9^m}{m}.$$

Capítulo octavo, I

Argumenta la conveniencia de estudiar las funciones circulares (arcos, senos y cosenos), no sólo por su naturaleza de funciones trascendentes, sino por provenir de logaritmos y exponenciales. Este comentario es un aviso de la *fórmula de Euler*.

Da una aproximación de π, (la periferia del) semicírculo de radio 1, pues es *luminosamente claro* que no es racional.

El tratamiento de Euler de las funciones circulares permiten que éstas entren en el análisis matemático, pasando de ser *líneas* a ser *funciones*.

Capítulo octavo, II

Apoyándose en la identidad $(\operatorname{sen} z)^2 + (\cos z)^2 = 1$ y su descomposición como

$$(\cos z + \sqrt{-1}\operatorname{sen} z)(\cos z - \sqrt{-1}\operatorname{sen} z),$$

aplica las fórmulas del seno y coseno de la suma de ángulos para obtener las fórmula de de Moivre a partir de las expresiones

$$(\cos z \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} nz$$

combinadas con la fórmula del binomio de Newton.

Capítulo octavo, III

Conviene ilustrar una vez más Euler cómo hace uso de los infinitos para obtener los desarrollos en serie deseados

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{1\,2}(\cos z)^{n-2}(\operatorname{sen} z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,2\,3\,4}(\cos z)^{n-4}(\operatorname{sen} z)^4 - \&c.$$

Si el arco z es infinitamente pequeño, $\operatorname{sen} z = z$ y $\cos z = 1$. Sea n infinitamente grande tal que $nz = v$ sea finito. También $n \operatorname{sen} z = v$ y

$$\cos nz = \cos v = 1 - \frac{v^2}{1\,2} + \frac{v^4}{1\,2\,3\,4} - \frac{v^6}{1\,2\,3\,4\,5\,6} + \&c.$$

La fórmula que describe $\operatorname{sen} nz$ como polinomio de grado n en $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ le permite obtener análogamente la serie del seno.

Capítulo octavo, y IV

Por procedimientos en los que Euler emplea el infinito como en las dos situaciones anteriores, deduce

Fórmula de Euler

$$e^{\sqrt{-1}z} = \cos z + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, z$$

a partir de la descripción de seno y coseno en términos de la exponencial aplicada a valores complejos.

La fórmula de Euler fue obtenida ya en 1714 por Roger Cotes; Euler la dedujo usando un resultado de unicidad de solución de ecuaciones diferenciales en 1740. En todo caso, es novedosa su modo de deducirla mediante el uso de *infinitos*.

Capítulo noveno, I

Euler parte de la idea de que localizar las raíces p/q de una serie (finita o infinita) es equivalente a encontrar los factores $p - qz$ de la serie. Reconociendo la dificultad de encontrar las raíces complejas, pero sabiendo que aparecen por pares conjugados, se propone como objetivo localizar los factores trinómicos $p - qz + rzz$.

Usando las propiedades de las funciones trigonométricas del capítulo previo, describe todos los factores (lineales y los trinomios con coeficientes reales) de las funciones $a^n + z^n$ y $a^n - z^n$. En concreto, son de la forma

$a + z$ y/0 $aa - 2az\cos\frac{2k-1}{n}\pi + zz$, según n sea impar o par

$a - z$, (también $a + z$, si n es par) y $aa - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + zz$

Capítulo noveno, II

Euler obtiene $e^x - e^{-x}$ como producto infinito. En el primer paso expresa

$$e^x - e^{-x} = (1 + \frac{x}{i})^i - (1 - \frac{x}{i})^i = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\,2\,3} + \frac{x^5}{1\,2\,3\,4\,5} + \&c.\right)$$

Las fórmulas anteriores aplicadas a

$n = i$ infinito, $a = 1 + \frac{x}{i}$ y $z = 1 - \frac{x}{i}$

garantizan que tendrá un factor del tipo

$$aa - 2az\cos\frac{2k}{i}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii})\cos\frac{2k}{i}\pi =$$

Capítulo noveno, II

Euler obtiene $e^x - e^{-x}$ como producto infinito. En el primer paso expresa

$$e^x - e^{-x} = (1+\frac{x}{i})^i - (1-\frac{x}{i})^i = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\,2\,3} + \frac{x^5}{1\,2\,3\,4\,5} + \&c.\right)$$

Las fórmulas anteriores aplicadas a

$$n = i \text{ infinito, } a = 1 + \tfrac{x}{i} \text{ y } z = 1 - \tfrac{x}{i}$$

garantizan que tendrá un factor del tipo

$$aa - 2az\cos\frac{2k}{i}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1-\frac{xx}{ii})\cos\frac{2k}{i}\pi =$$

$$\frac{4xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$$

Capítulo noveno, III

Finalmente, argumenta que el factor

$$1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$$

debe aparecer en la descomposición de $e^x - e^{-x}$, donde el término $\frac{xx}{ii}$ *se omite por completo, porque aunque se multiplique por i permanece infinitamente pequeño*.

Así, considerando el factor x, común a cada sumando de la serie, puede expresar

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x(1 + \frac{xx}{\pi\pi})(1 + \frac{xx}{4\pi\pi})(1 + \frac{xx}{9\pi\pi})(1 + \frac{xx}{16\pi\pi})\&c.$$

Capítulo noveno, y IV

Ahora basta hacer la sustitución $x = z\sqrt{-1}$ para obtener la expresión de sen z como producto infinito, vía la fórmula de Euler.

Un razonamiento análogo al aplicado para $e^x - e^{-x}$, permite deducir la expresión de $e^x + e^{-x}$ como producto infinito. De nuevo la fórmula de Euler y la sustitución $x = z\sqrt{-1}$ permite obtener cos z como producto infinito.

Capítulo décimo, I

Otra idea importante...

Relacionar los coeficientes del desarrollo en serie asociado a un producto con sus raíces:

- $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$

Capítulo décimo, I

Otra idea importante...

Relacionar los coeficientes del desarrollo en serie asociado a un producto con sus raíces:

- $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$
- $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$

Capítulo décimo, I

Otra idea importante...

Relacionar los coeficientes del desarrollo en serie asociado a un producto con sus raíces:

- $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$
- $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$
- $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \&c.$

Capítulo décimo, I

Otra idea importante...

Relacionar los coeficientes del desarrollo en serie asociado a un producto con sus raíces:

- $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$
- $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$
- $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \&c.$
- $C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \&c.$

Capítulo décimo, I

Otra idea importante...

Relacionar los coeficientes del desarrollo en serie asociado a un producto con sus raíces:

- $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\&c. = (1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$
- $A = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.$
- $B = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\&c.$
- $C = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\&c.$

Si llamamos P, Q, R, S,... a las potencias sucesivas de los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$...

$$P = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\&c.$$
$$Q = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\&c.$$
$$R = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\&c.$$
$$S = \alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\&c.$$

Capítulo décimo, II

Se tienen las relaciones:

$$
\begin{aligned}
P &= A \\
Q &= AP - 2B \\
R &= AQ - BP + 3C \\
S &= AR - BQ + CP - 4D \\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E \\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F
\end{aligned}
$$

Capítulo décimo, y III

Aplicándolas a los productos obtenidos el capítulo noveno, Euler es capaz de sumar los inversos de las potencias pares de los números naturales (¡hasta la potencia vigésimo sexta!).

$$
\begin{aligned}
P = \frac{\pi^2}{6} &= \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c. \\
Q = \frac{\pi^4}{90} &= \quad 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \&c. \\
R = \frac{\pi^6}{945} &= \quad 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \&c.
\end{aligned}
$$

Euler subraya que en cada caso se obtiene un múltiplo racional de la potencia correspondiente de π, aunque no reconoce en la sucesión de los números de Bernoulli (posteriormente, en 1755, Euler se daría cuenta de ello). [Problema de Basilea].

Capítulo undécimo, I

Euler va acumulando estrategias prácticas para poder hacer cálculos aproximados. Pensemos en las expresiones que proporcionan las funciones seno y coseno como productos infinitos

$$\operatorname{sen} z = z(1 - \frac{zz}{\pi\pi})(1 - \frac{zz}{4\pi\pi})(1 - \frac{zz}{9\pi\pi})(1 - \frac{zz}{16\pi\pi})\&c.$$

$$\cos z = (1 - \frac{4zz}{\pi\pi})(1 - \frac{4zz}{9\pi\pi})(1 - \frac{4zz}{25\pi\pi})(1 - \frac{4zz}{49\pi\pi})\&c.$$

y en el resultado que se obtiene cuando se aplican a múltiplos racionales de π. Cuando consideremos $\frac{m\pi}{2n}$ con $n = m = 1$, obtenemos para la función seno la fórmula de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13}\&c.$$

Distintos valores de m, n dan lugar a otras expresiones de números reales como productos infinitos.

Capítulo undécimo, y II

Combinando esta idea con las expresiones en serie de potencias de funciones trascendentes ya estudiadas, por ejemplo el logaritmo, calcula aproximaciones de números como $l\pi$:

$$\frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{25})(1 - \frac{1}{49})(1 - \frac{1}{81})\&c.$$

se tiene que

$$l\pi = l4 + l(1 - \frac{1}{9}) + l(1 - \frac{1}{25}) + l(1 - \frac{1}{49}) + l(1 - \frac{1}{81}) + \&c.$$

y el desarrollo en serie de cada sumando permite *sumando en columnas* obtener *sin cálculos tediosos el logaritmo hiperbólico de* π.

Capítulo decimoquinto, I

Plantea cómo describir productos infinitos de la forma

$$(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\&c.$$

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\&c.$$

y sus inversos como series $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$.

Para $\alpha = 1/2^n$, $\beta = 1/3^n$, $\delta = 1/5^n$ (en general, $1/p^n$ con p primo), el producto asociado con signo + y evaluado en $z = 1$ será

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{15^n} + \&c.$$

aparecen junto a 1 las potencias n-ésimas de los inversos de los números naturales en cuya descomposición como producto de primos no se presenta ningún factor repetido.

Capítulo decimoquinto, II

Sean el producto

$$(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z)\&c. =$$

$$1 + A'z + B'z^2 + C'z^3 + D'z^4 + \&c.$$

y su inverso $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$

donde

$$A' = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \&c.)$$

$$B' = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \&c.$$

$$C' = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta + \&c.)$$

Capítulo decimoquinto, III

Utilizando que el producto de ambos es la serie 1, los coeficientes respectivos verifican:

$$A + A' = 0$$

$$AA' + B + B' = 0$$

$$C + C' + AB' + A'B = 0, \&c.$$

Así,

$$A = -A' = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$$

$$B = -B' - AA' = A^2 - B' =$$

$=$suma de todos los dobles productos, repetidos o no.

Capítulo decimoquinto, IV

$$C = -C' - A'(B - B') =$$

$=$suma de todos los triples productos sin repetir$+$ producto de la suma de todos por la suma de los cuadrados$=$ suma de triples productos, sin repetir$+$ suma de triples productos, con al menos un cuadrado.

Aplicando esto de nuevo al caso en que $z = 1$, se obtiene que el inverso del producto

$$(1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n})\&c.$$

es la suma de los inversos de las potencias n-ésimas de todos los números naturales.

Conversión de series en productos infinitos

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \&c.$$

$$\frac{A}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \&c.$$

$$B = A(1 - \frac{1}{2^n}) = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \&c.$$

$$\frac{B}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} + \frac{1}{33^n} + \&c.$$

$$C = B(1 - \frac{1}{3^n}) = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \&c.$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})$$

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})$$

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\&c.$$

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\&c. = 1$$

Capítulo decimoquinto, y VI

Conversión de series en productos infinitos, II

Iterando el procedimiento, se tiene que

$$A(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\&c. = 1$$

o, equivalentemente

$$A = \frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\&c.$$

Capítulo decimosexto, I

Euler aborda el problema de determinar de cuántas maneras puede escribirse un número natural como suma de otros dados, según puedan o no repitirse.

El procedimiento es el siguiente: para números naturales $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \&c.$, se considera el producto

$$(1 + x^{\alpha} z)(1 + x^{\beta} z)(1 + x^{\gamma} z)(1 + x^{\delta} z)(1 + x^{\varepsilon} z)\&c.$$

que se escribe como serie infinita en la variable z como
$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \&c.$
Como se ha analizado previamente,

$$P = x^{\alpha} + x^{\beta} + x^{\gamma} + x^{\delta} + x^{\varepsilon} + \&c.$$

mientras que $Q, R, S, T, \&c.$ son las sumas de productos dobles, triples, cuádruples, etc. de estas potencias de x.

Capítulo decimosexto, II

Agrupados los términos homogéneos, si N fuera el coeficiente de $x^n z^m$, se puede asegurar que el número n puede descomponerse como suma de m términos de la sucesión $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \&c.$ de N maneras distintas.

Elecciones particulares de la sucesión $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \&c.$ dan lugar a soluciones a distintas cuestiones

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4, \varepsilon = 5, \&c.$$

Trabajamos con el producto

$$(1 + xz)(1 + x^2 z)(1 + x^3 z)(1 + x^4 z)(1 + x^5 z)\&c.$$

El coeficiente de $x^n z^m$ indica de cuántas maneras puede descomponerse n como suma de m naturales distintos.

Capítulo decimosexto, y III

Al hacer $z = 1$, el coeficiente de x^n describe de cuántas maneras puede escribirse n como suma de naturales distintos.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\&c. =$$
$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \&c.$$

El número 8 admite estas 6 expresiones como suma de números naturales: $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4$.

Refinando esta idea y mediante las expresiones obtenidas en el capítulo previo para productos infinitos, determina de cuántas maneras distintas puede descomponerse un número como suma de otros m, distintos o no.

Capítulo decimoctavo, I

El último capítulo está dedicado a las fracciones continuas: aquellas en las que el denominador es suma de un entero más otra fracción en la que el denominador reproduce el esquema. Especial atención se presta a aquellas con numerador igual a 1.

$$\text{Si } x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \&c.}}}}$$

Capítulo decimoctavo, II

El primer paso es estudiar las fracciones truncadas. La sucesión

$$a,\ a+\tfrac{1}{b},\ a+\cfrac{1}{b+\tfrac{1}{c}},\ a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ \&c.$$

Capítulo decimoctavo, II

El primer paso es estudiar las fracciones truncadas. La sucesión

$$a,\ a+\tfrac{1}{b},\ a+\cfrac{1}{b+\frac{1}{c}},\ a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}},\ \&c.$$

se escribe como

$$a,\ \frac{ab+1}{b},\ \frac{a+c(ab+1)}{1+bc},\ \frac{(ab+1)+d(abc+a+c)}{b+d(bc+1)},\ \&c.$$

Capítulo decimoctavo, III

Donde es fácil deducir la ley recursiva común que genera numerador y denominador

$$\frac{1}{0} \qquad \frac{a}{1} \qquad \frac{ab+1}{b} \qquad \frac{c(ab+1)+a}{bc+1} \qquad \frac{d(abc+a+c)+(ab+1)}{d(bc+1)+b}$$

$$a \qquad b \qquad c \qquad d$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1}$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1} + (\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1})$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1} + (\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}) + (\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2})$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1} + (\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}) + (\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2}) + (\frac{a_4}{b_4} - \frac{a_3}{b_3})$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1} + (\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}) + (\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2}) + (\frac{a_4}{b_4} - \frac{a_3}{b_3}) + (\frac{a_5}{b_5} - \frac{a_4}{b_4})$$

Capítulo decimoctavo, IV

Euler repara en la posibilidad de escribir una fracción continua (general) como una serie alternada. Para ello basta considerar la sucesión $(\frac{a_n}{b_n})_n$ de sumas truncadas (que siguen una ley de generación análoga a la estudiada cuando los numeradores son 1) y escribir la fracción x como

$$x = \frac{a_1}{b_1} + (\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}) + (\frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2}{b_2}) + (\frac{a_4}{b_4} - \frac{a_3}{b_3}) + (\frac{a_5}{b_5} - \frac{a_4}{b_4}) + \&c.$$

Capítulo decimoctavo, V

Recíprocamente, se puede escribir una serie alternada $x = A - B + C - D + F - \&c.$ como una fracción continua, donde los numeradores y denominadores siguen la ley

$$\begin{array}{cccccc} A & B & AC & BD & CE & \&c. \\ 1 & A-B & B-C & C-D & D-E & \&c. \end{array}$$

Mientras que si $y = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \&c.$, se tiene

$$\begin{array}{cccccc} 1 & A^2 & B^2 & C^2 & D^2 & \&c. \\ A & B-A & C-B & D-C & E-D & \&c. \end{array}$$

Capítulo decimoctavo, VI

Euler intuyó la propiedad de *mejor aproximación* de las truncadas de una fracción continua con numeradores 1. Las sumas truncadas son los racionales que aproximan mejor al número representado entre los racionales de denominador menor o igual, y él hizo notar la rapidez con que las sumas parciales de la serie aproximaban el límite.

Refiriéndose a la fracción continua de $\sqrt{2}$, Euler declara:

Las fracciones extraídas de esa fracción continua se acercan cada vez más estrechamente a ese valor, y con tal prontitud, que apenas cabe hallar modo más rápido de expresar aproximadamente ese valor irracional mediante números racionales.

Habría que esperar a que H.J.S. Smith, en 1876, diera una demostración de esta conjetura.

Capítulo decimoctavo, y VII

No podemos resistir la tentación de mostrar algunas de las expresiones como fracción continua que nos regala Euler

$$l2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \&c.}}}}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \&c.}}}}}$$

A modo de epílogo

Joan Margarit

Cada generación ha de interpretar estos conceptos (amor, dolor, muerte, mal, felicidad, miedo, culpa) de la misma manera que cada generación debería volver a traducir las grandes obras de la literatura escritas en otras lenguas, porque traducirlas es volver a interpretarlas, dejarlas a punto para ser leídas de nuevo por esa generación.

A modo de epílogo

Joan Margarit

Cada generación ha de interpretar estos conceptos (amor, dolor, muerte, mal, felicidad, miedo, culpa) de la misma manera que cada generación debería volver a traducir las grandes obras de la literatura escritas en otras lenguas, porque traducirlas es volver a interpretarlas, dejarlas a punto para ser leídas de nuevo por esa generación.

Bernard de Chartres

Somos como enanos a hombros de gigantes. Podemos ver más, y más lejos, no por tener vista más penetrante ni otra distinción física nuestra, sino porque estamos alzados por su gran altura.

¡El maestro de todos nosotros!

Retrato de Leonhard Euler, por Johann Georg Brucker (1737)

Muchas gracias por la atención

Muchas gracias por la atención

Joaquín Vaquero Turcios, Homenaje a Euler (fotografía de Alba Táboas)