

# Seminario de ideas y visualizaciones en Matemáticas

4 de marzo de 2010

## ***DIMENSIÓN***

Marco Castrillón López  
Depto. Geometría y Topología  
Universidad Complutense de Madrid



# Esquema

- Introducción
- Espacios vectoriales
- Visualización de dimensión 4
- Dimensión y Topología
- Dimensión y fractales
- Dimensión y Física

# INTRODUCCIÓN

**R.A.E.** (Del lat. *dimensio*, -ōnis).

- Longitud, área o volumen de una línea, una superficie o un cuerpo, respectivamente.
- *Fís.* Cada una de las magnitudes de un conjunto que sirven para definir un fenómeno.

Dimensión 0 --- longitud  
Dimensión 1 --- área  
Dimensión 2 --- área  
Dimensión 3 --- volumen

# INTRODUCCIÓN

R.A.E. (Del lat. *dimensio*, -ōnis).

- Longitud, área o volumen de una línea, una superficie o un cuerpo, respectivamente.
- *Fís.* Cada una de las magnitudes de un conjunto que sirven para definir un fenómeno.

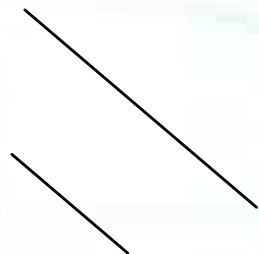
Relacionado con la noción de ***medida***

- Dimensión 1--- longitud
- Dimensión 2--- área
- Dimensión 3--- volumen

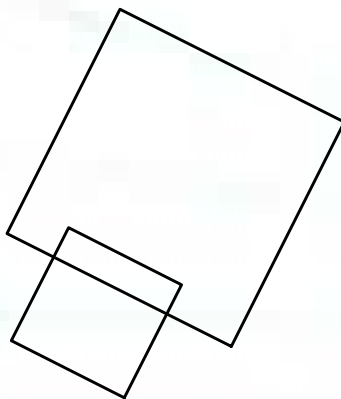
# Euclides ( $\approx 325$ a.C.- 265 a.C.)

- Un **punto** es lo que no tiene partes.
- Un **línea** es una longitud sin anchura.
- Los extremos de una línea son puntos.
- Una **superficie** es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Los extremos de una superficie son líneas.
- Un **sólido** es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.
- Y el extremo de un sólido es una superficie.

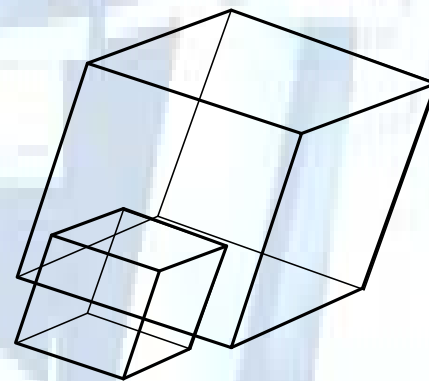
Si se realiza una homotecia de razón  $k$



$$\text{long}(S') = k \text{ long}(S)$$



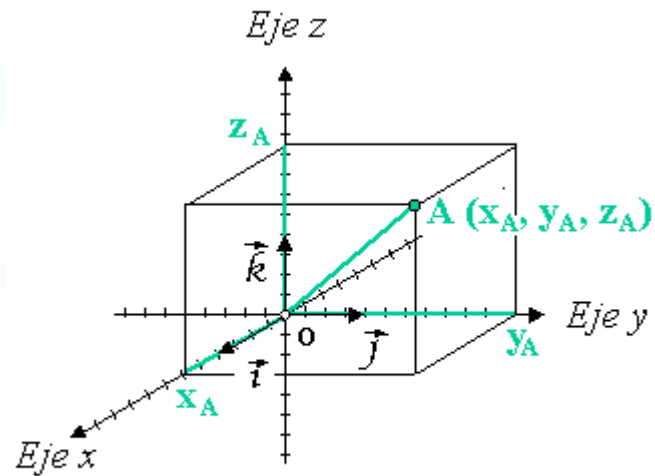
$$\text{área}(C') = k^2 \text{ área}(C)$$



$$\text{vol}(K') = k^3 \text{ vol}(K)$$

# Descartes (1.596 d.C.- 1.650 d.C.)

En 1619 (observando el vuelo de una mosca en una habitación) da forma a la idea de *coordenadas cartesianas*



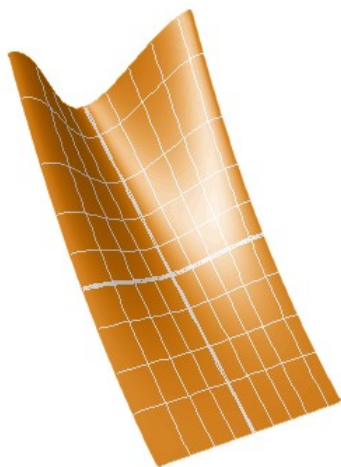
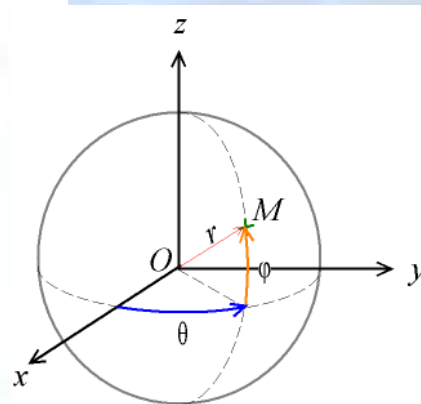
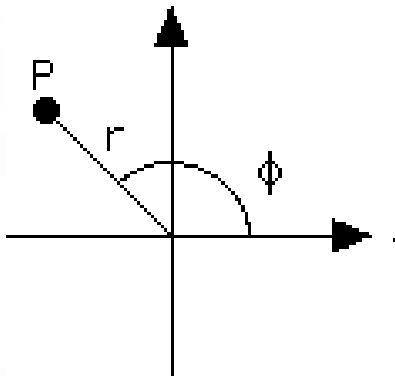
Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales

*“Un punto en la recta necesita un número para definirse”*

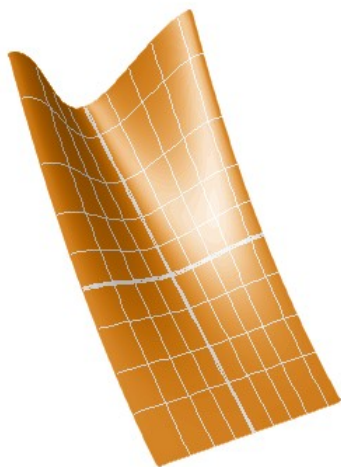
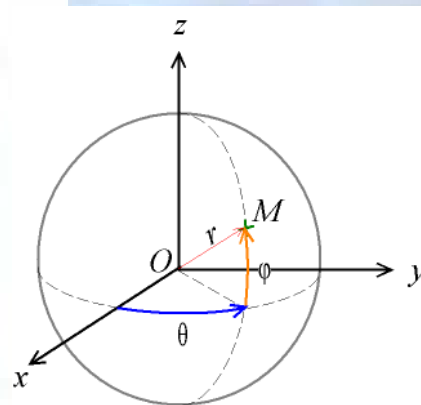
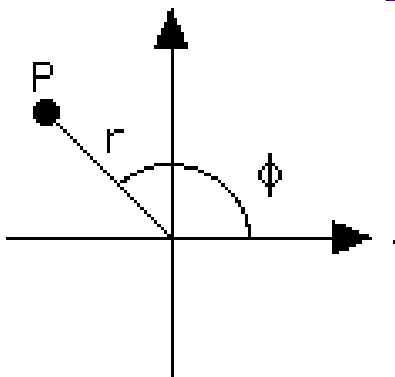
*“Un punto en el plano necesita de dos números para definirse”*

*“Un punto en el espacio necesita de tres números para definirse”*

La noción se extiende al concepto de ***coordenadas curvilíneas***



La noción se extiende al concepto de **coordenadas curvilíneas**



Si se necesitan  **$n$**  coordenadas (de forma local) se dice que el objeto tiene **dimensión  $n$** .

• Por otra parte, en el siglo XIX hay tres trabajos importantes

• “Chapters in the Analytical Geometry of  $n$  dimensions” de Cayley (1843).

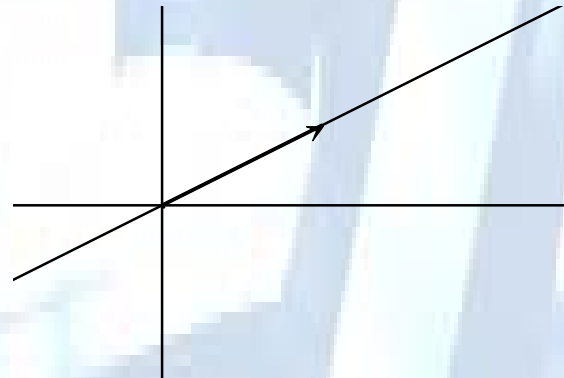
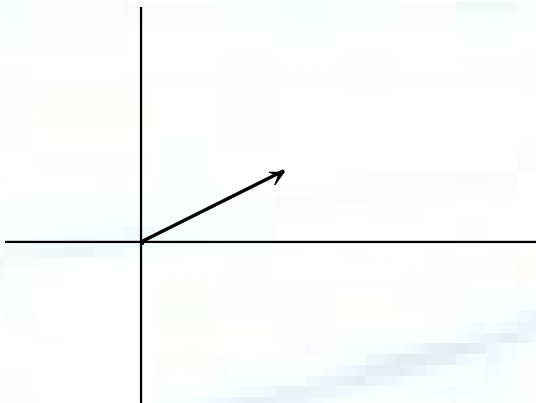
• “Die lineale Ausdehnungslehre” de Grassmann (1844).

• “Theorie der vielfachen Kontinuität” de Schläfli (1852).

Se fundamentan la conocida hoy como **dimensión de espacio vectorial**.

- Partimos de un espacio vectorial, es decir, un conjunto de **vectores** con dos operaciones: *suma* y *multiplicación por escalar*.

- Si tomamos un vector no nulo  $v$ , se define una recta como la formada por todos los  $\lambda v$ , siendo  $\lambda$  un número.



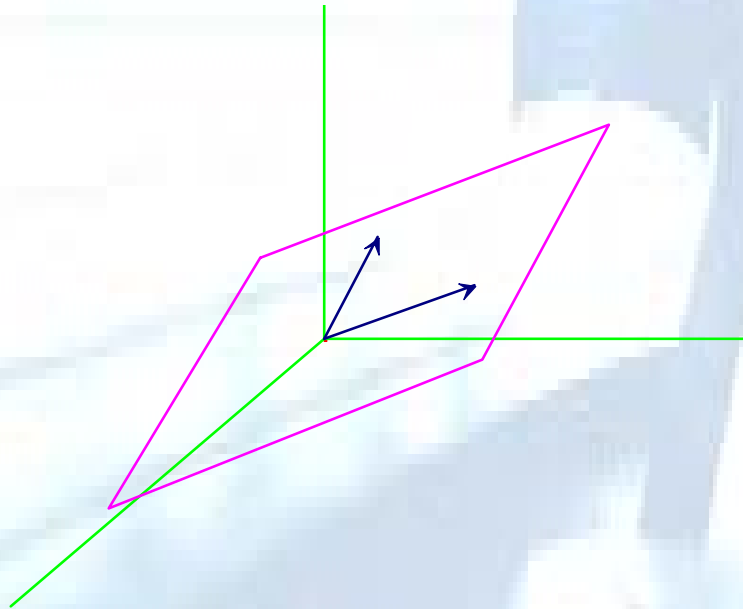
- Así generada, la recta tiene dimensión 1, pues requiere de un único vector para generarse.

- Si tomamos un nuevo vector  $w$  que **no** esté en la recta podemos considerar

$$\lambda v + \mu w$$

Y obtenemos el plano que generan.

El plano tiene dimensión 2.



Así, la dimensión corresponde con el número de vectores independientes que generan el espacio. Independientes quiere decir que  $v_{i+1}$  no está en el espacio generado por  $\{v_1, \dots, v_i\}$ .

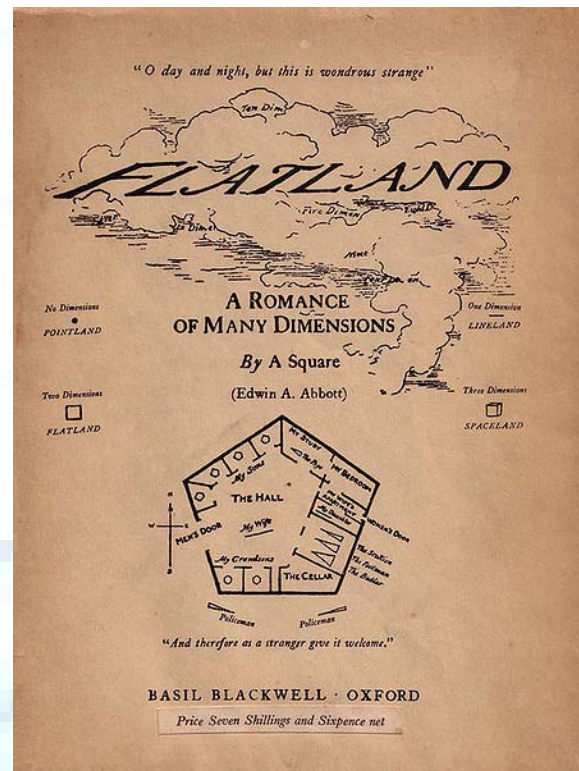
# VISUALIZACIÓN DE CUARTA DIMENSIÓN

- La tradición siempre hablaba de 3 dimensiones. Por ejemplo, Arítóteles (*De Caelo*), E. Kant (*Crítica de la Razón Pura*), aunque este último habla de también de otros *posibles espacios*.
- D'Alembert en la *Encyclopédie* de Diderot, en el concepto de dimensión, sugiere **el tiempo** como cuarta dimensión (1754).
- Por otra parte, una vez madurada la idea de dimensión cartesiana, en el siglo XVIII se empieza a experimentar con la idea de espacio de **4 dimensiones**.
  - Möbius (1827) sugiere la equivalencia de la mano derecha y la mano izquierda moviéndolas en un espacio de cuatro dimensiones.
  - Cayley, Grassmann, Schläfli y Riemann...

- Para visualizar la dimensión 4, la idea fundamental es generalizar el paso de dimensión 2 a dimensión 3.

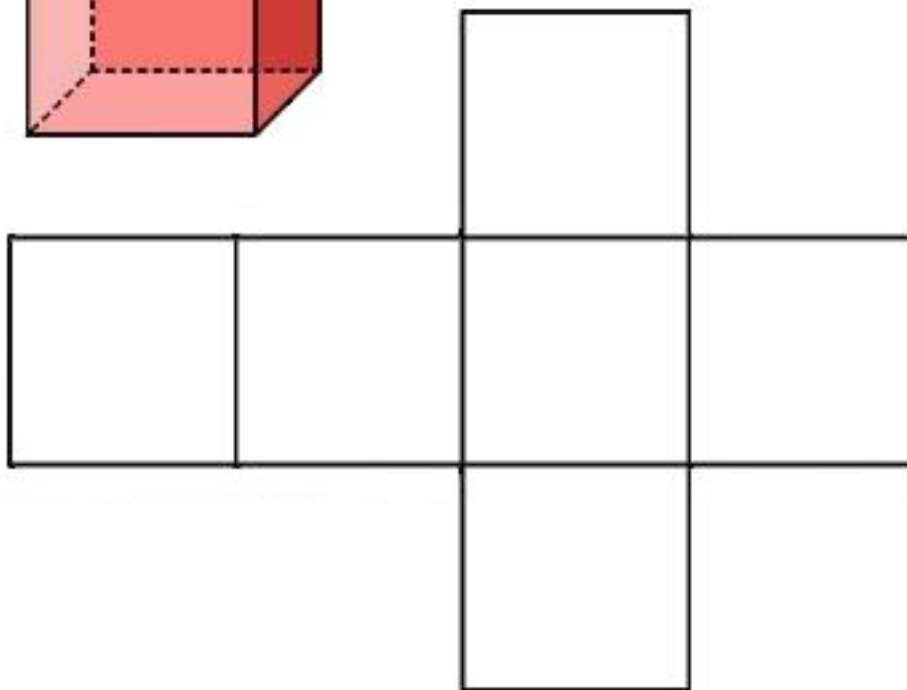
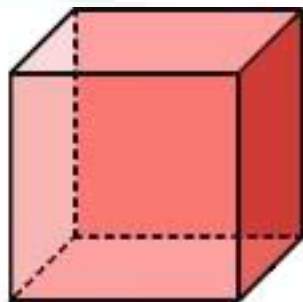
- Para visualizar la dimensión 4, la idea fundamental es generalizar el paso de dimensión 2 a dimensión 3.
- Un hito es el cuento de E. Abbot (1884) titulado

*Flatland: A Romance of Many Dimensions*

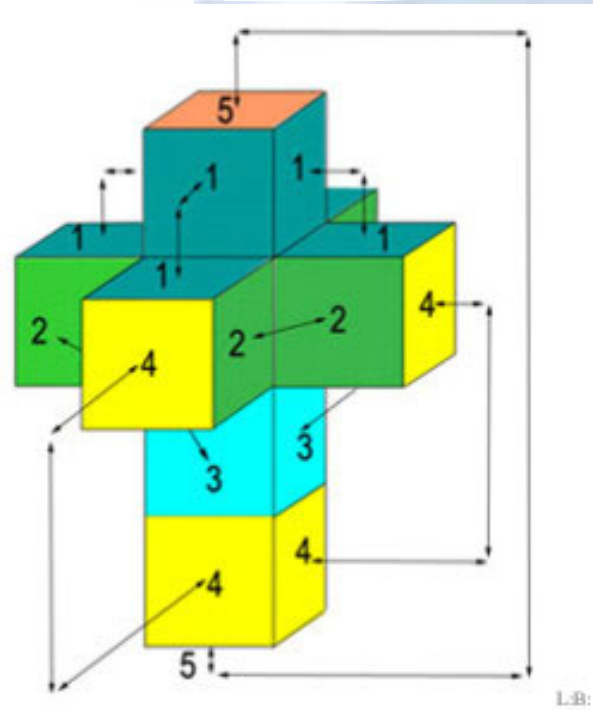
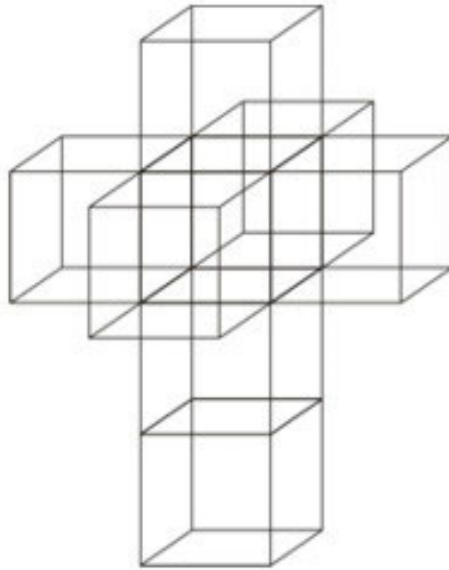


Vamos a trabajar con un CUBO.

- Primer método: DESARROLLO



## Hipercubo en 3D



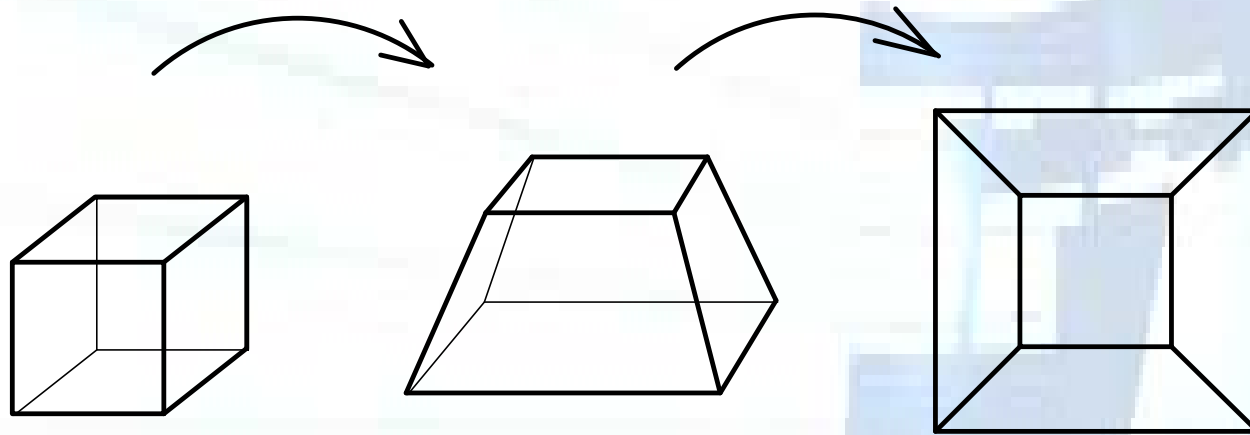


“La crucifixión” (1954) o  
“Corpus Hypercubus”

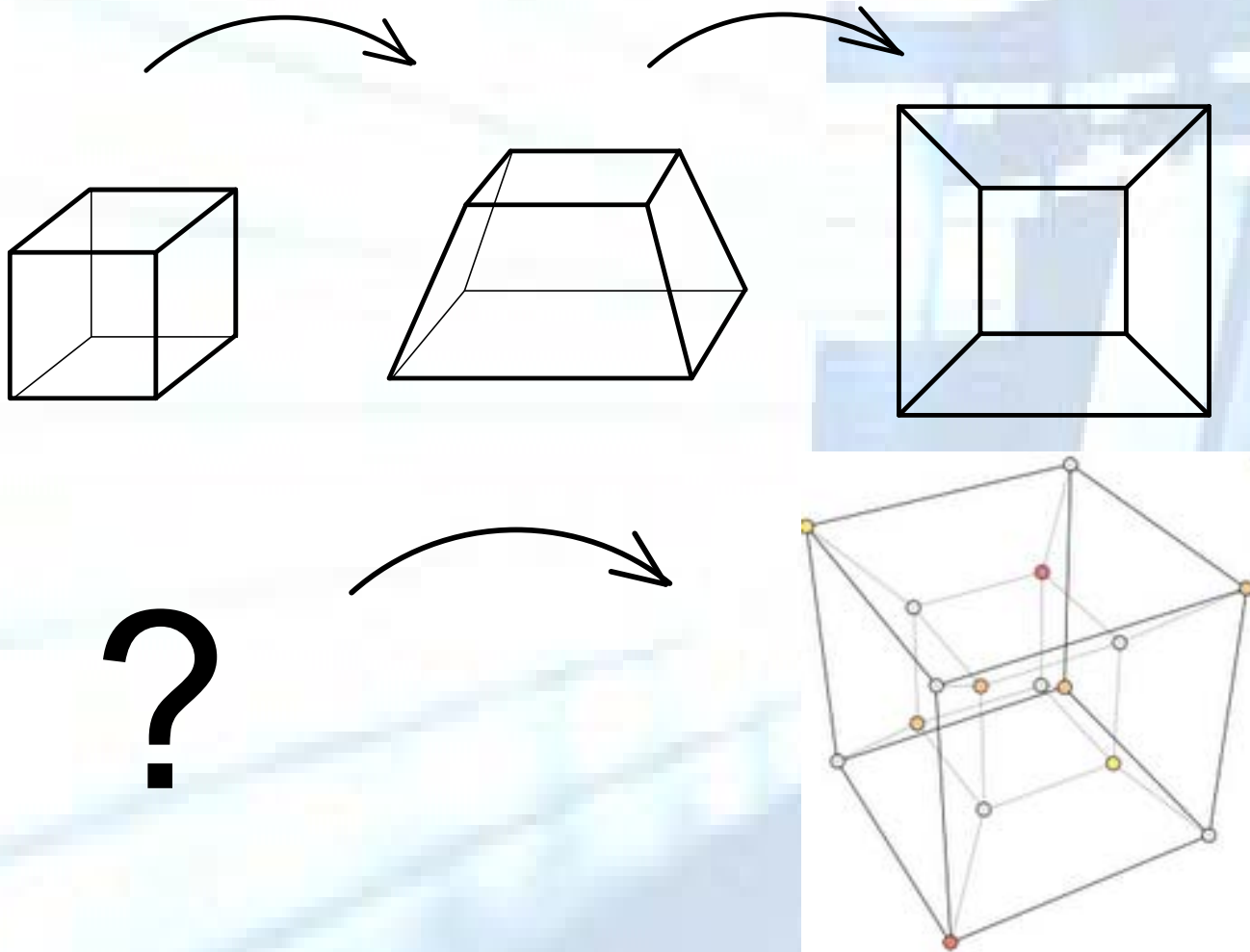


“Dalí al hipercubo”,  
de Francesc Català-Roca

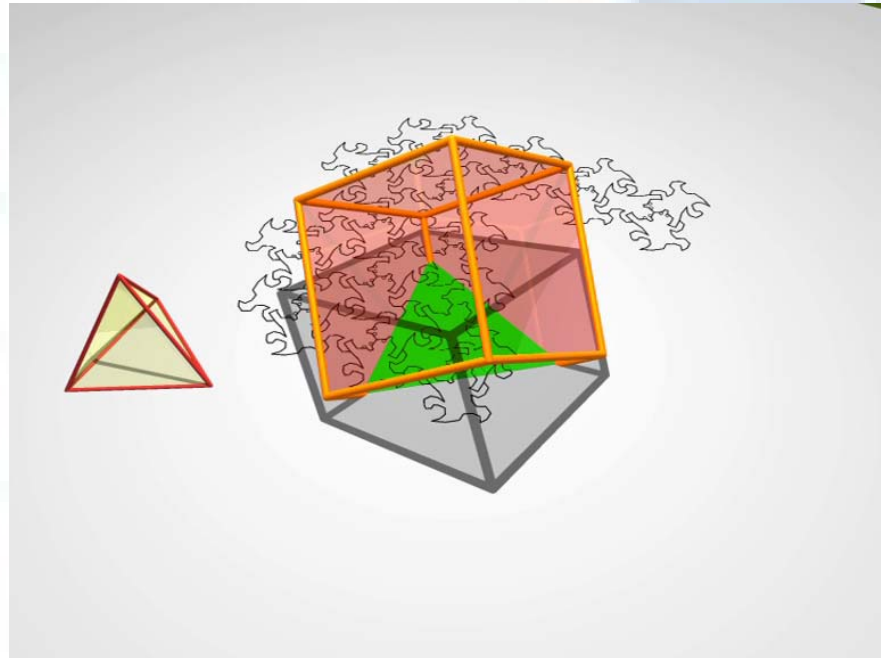
- Segundo método: “*APLASTAMIENTO*”



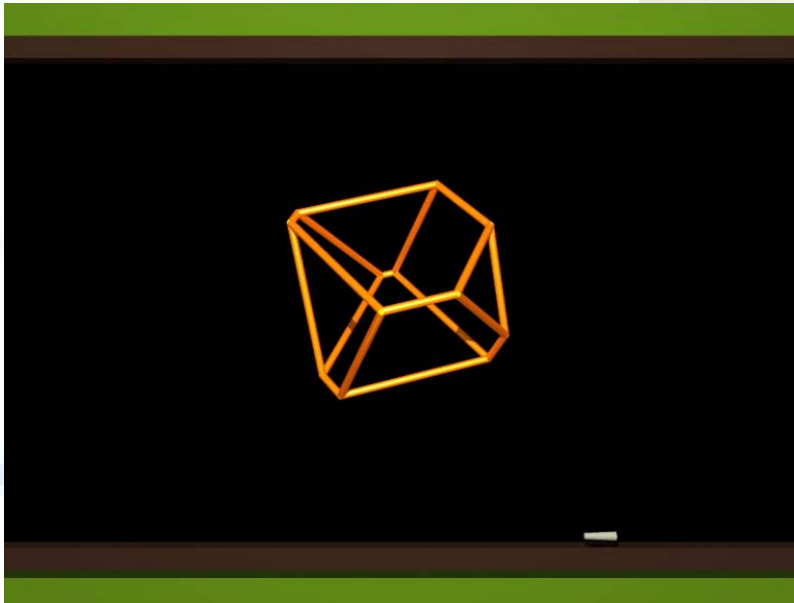
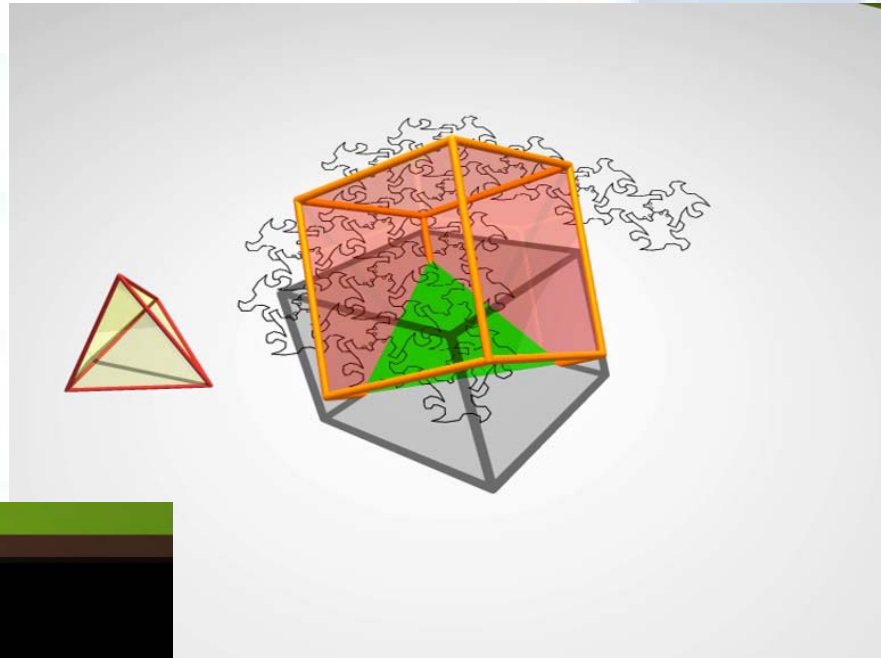
- Segundo método: “*APLASTAMIENTO*”



- Tercer método: *SECCIÓN*



- Tercer método: *SECCIÓN*



# DIMENSIÓN Y TOPOLOGÍA

- La noción de dimensión como el número de parámetros para determinar un punto entra en crisis

- La biyección de Cantor entre

$$\mathbf{R} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^2$$

- La aplicación continua y supreyectiva de Peano de

$$[0,1] \quad \text{y} \quad [0,1] \times [0,1]$$

- ¿Se puede establecer una biyección continua (homeomorfismo) entre  $\mathbf{R}^n$  y  $\mathbf{R}^m$ ?
- Brower (1913) prueba la imposibilidad de tal biyección asignando un *número a un espacio topológico que es invariante por homeomorfismo*.
- Se define la primera dimensión topológica.

- Dimensión inductiva (Menger-Urison 1922)

- El conjunto vacío tiene **ind** = -1.
- Un conjunto tiene dimensión **ind** =  $n$  si todo punto admite una base de entornos abiertos  $\{U\}$  con **ind**(frontera  $U$ ) =  $n-1$ .
- Si **ind** >  $n$  para todo  $n$ , se dice que **ind** es infinita.

Si dos espacios son homeomorfos, entonces tiene la misma dimensión inductiva.

- Dimensión inductiva (Menger-Urison 1922)

- El conjunto vacío tiene **ind** = -1.
- Un conjunto tiene dimensión **ind** =  $n$  si todo punto admite una base de entornos abiertos  $\{U\}$  con **ind**(frontera  $U$ ) =  $n-1$ .
- Si **ind** >  $n$  para todo  $n$ , se dice que **ind** es infinita.

Si dos espacios son homeomorfos, entonces tiene la misma dimensión inductiva.

E. Kant:

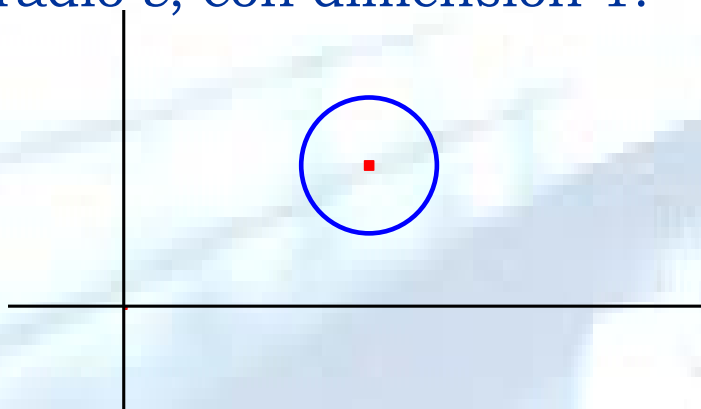
“El espacio tiene tres dimensiones ya que no es frontera de otro espacio...”

### Ejemplo:

- $\{p\}$  tiene dimensión 0 porque no tiene frontera.
- $\mathbf{R}$  tiene dimensión 1, ya que todo punto  $p$  tiene una base de entornos  $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  cuya frontera es  $\{p - \varepsilon, p + \varepsilon\}$  tiene dimensión 0.



- $\mathbf{R}^2$  tiene dimensión 1, ya que todo punto  $p$  tiene una base de entornos  $B(p, \varepsilon)$  cuya frontera es la circunferencia de centro  $p$  y radio  $\varepsilon$ , con dimensión 1.



### Ejemplo:

- En general  $\mathbf{R}^n$  tiene dimensión  $n$ .

¡OJO! Juega un papel importante la topología:

- **Ind**  $(\mathbf{R}, T_w) = 1 \rightarrow$  La recta como continuo unidimensional pero

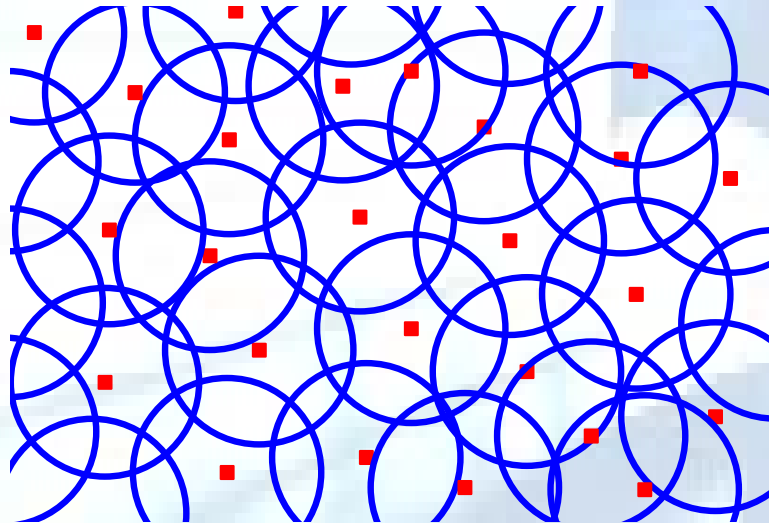
- **Ind**  $(\mathbf{R}, T_D) = 0$  ó **Ind**  $(\mathbf{R}, T_T) = 0 \rightarrow$

La recta como conjunto de puntos aislados.

- Dimensión de recubrimiento (Čech 1933)

Se basa en el principio de recubrimiento de Lebesgue:

*“En  $\mathbf{R}^n$ , si tengo un recubrimiento por discos abiertos, siempre hay puntos cubiertos por al menos  $n+1$  discos”.*



- Dimensión de recubrimiento (Čech 1933)

- El conjunto vacío tiene **dim** = -1.
- Un conjunto  $X$  tiene dimensión **dim** =  $n$  si todo recubrimiento abierto de  $X$  tiene un refinamiento abierto en de orden  $n+1$ .

(El orden es  $k$  si hay una familia de  $k$  conjuntos con intersección no vacía pero toda intersección de  $k+1$  es vacía).

- Si **dim**  $> n$  para todo  $n$ , se dice que **dim** es infinita.

---

- Dimensión de recubrimiento (Čech 1933)

- El conjunto vacío tiene **dim** = -1.
- Un conjunto  $X$  tiene dimensión **dim** =  $n$  si todo recubrimiento abierto de  $X$  tiene un refinamiento abierto en de orden  $n+1$ .

(El orden es  $k$  si hay una familia de  $k$  conjuntos con intersección no vacía pero toda intersección de  $k+1$  es vacía).

- Si **dim**  $> n$  para todo  $n$ , se dice que **dim** es infinita.

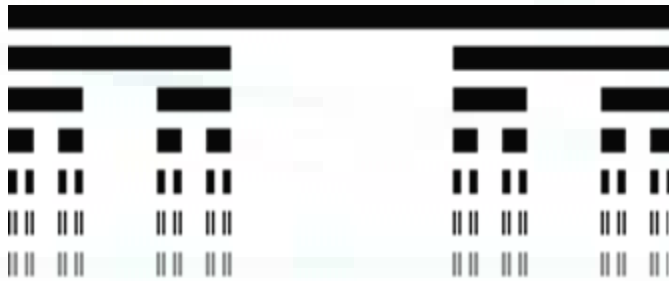
En espacios métricos separables, las nociones ind y dim coinciden, pero en general no.

Los espacios de dimensión infinita requieren estudio a parte.

# DIMENSIÓN Y FRACTALES

En el siglo XIX surgen unos objetos de *complicado* tratamiento:

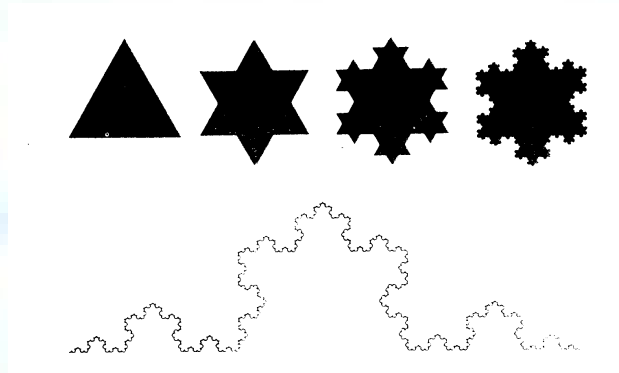
- El conjunto de Cantor:



Longitud = 0

Infinitos puntos no numerables

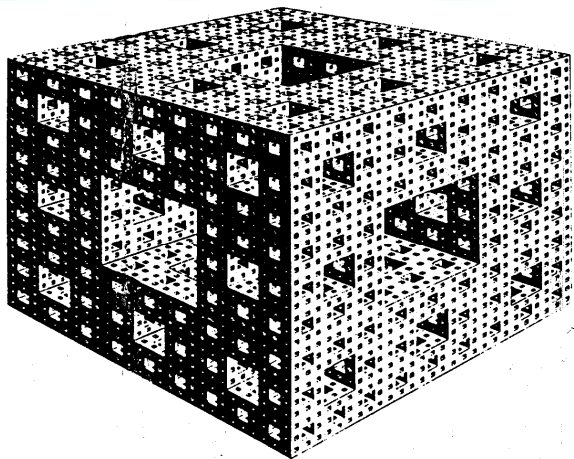
- La curva de Koch:



Área finita

Longitud infinita

- El conjunto de Cantor:



Volumen encerrado = 0

Área infinita

- La curva de Peano...

Surgen dimensiones fractales:

- Dimensión por recubrimiento:

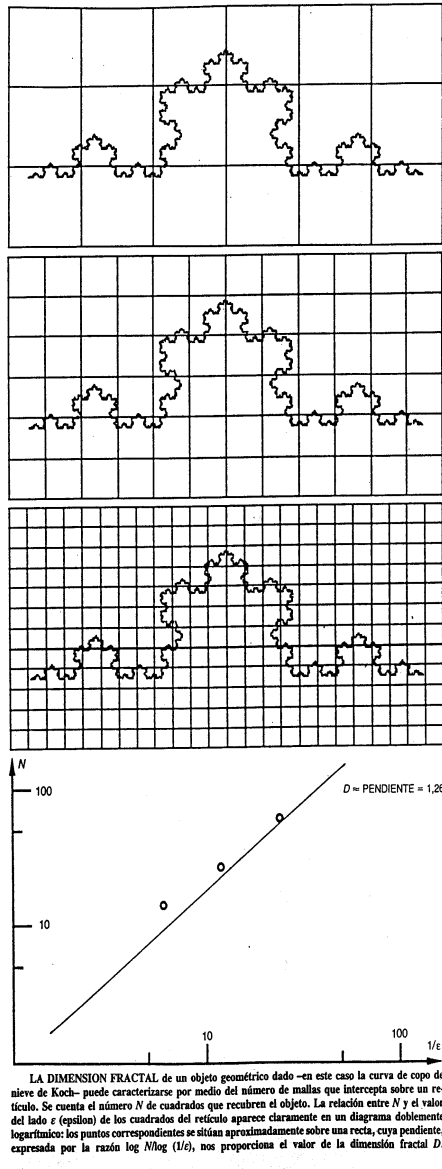
- La idea consiste en recubrir el conjunto en cuestión por bolas (o cuadrados) de radio igual a  $1/n$  para posteriormente contar el menor número de bolas necesitadas  $N(n)$ . Haciendo tender  $n$  a  $\infty$ , se define la dimensión de recubrimiento como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{\log n}$$

En distintos conjuntos, que el número  $N(n)$  se comportaba como  $n^D$  para cierto  $D$ , cuando  $n$  es grande.

Ese  $D$  es 1 para un segmento, 2 para una recta, 3 para un cubo...

Ejemplo:



En general:

- Cantor

$$\log 2 / \log 3 \approx 0,631$$

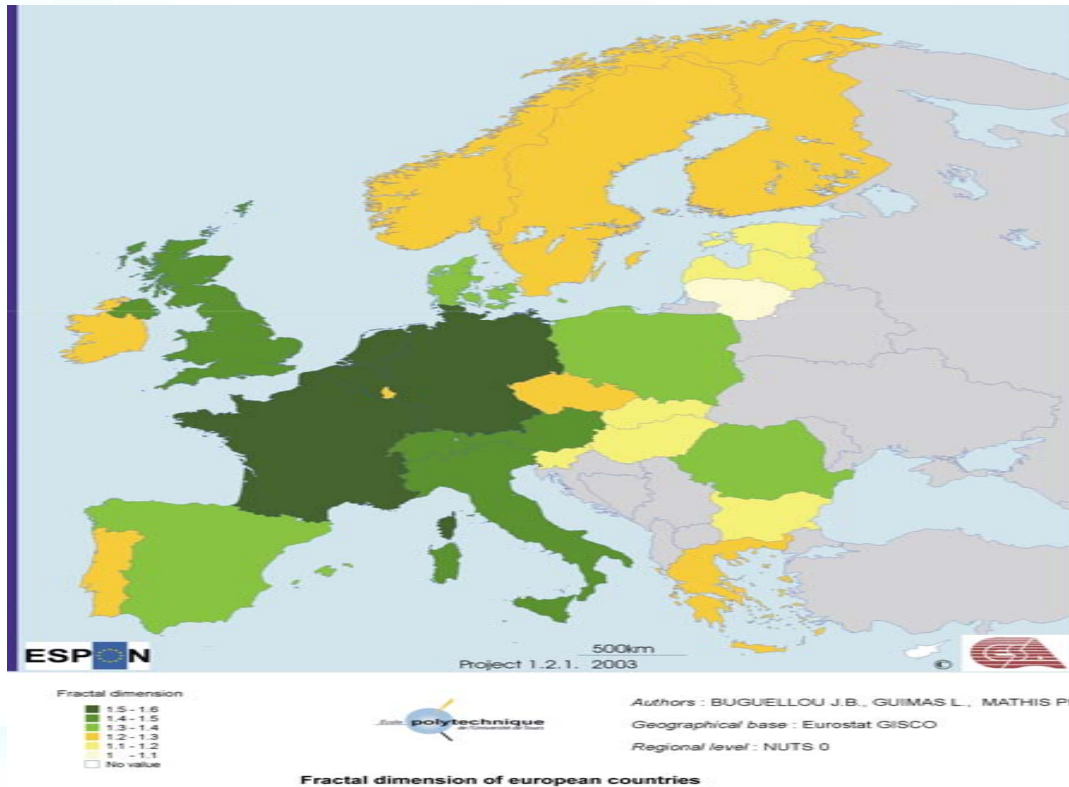
- Koch

$$\log 4 / \log 3 \approx 1,262$$

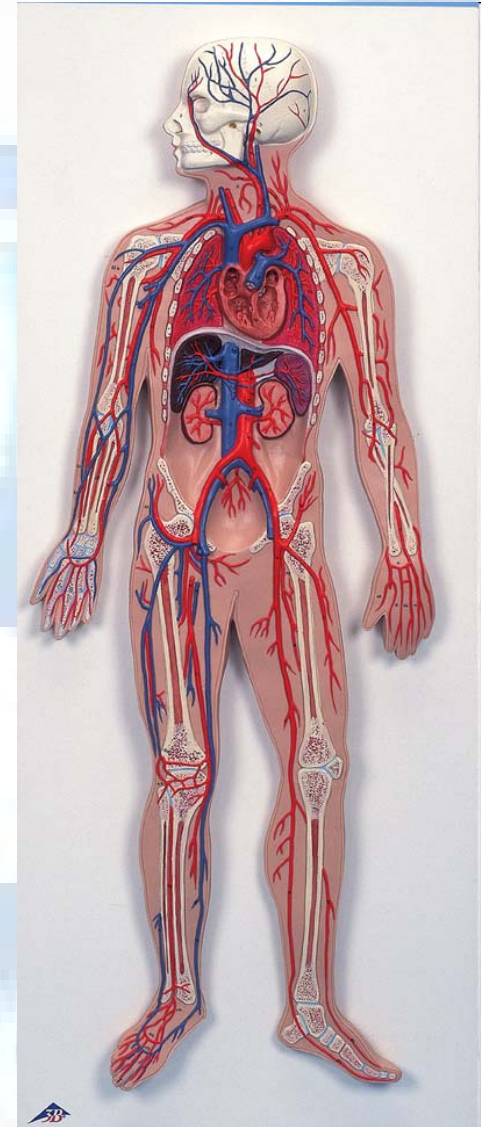
- Menger

$$\log 20 / \log 3 \approx 2,727$$

- En otros contextos...



Por ejemplo, el sistema circulatorio de un ser humano “tiene” una dimensión fractal de  $\approx 2.7$ .



Surgen dimensiones fractales:

- Dimensión de Hausdorff-Besicovitch:

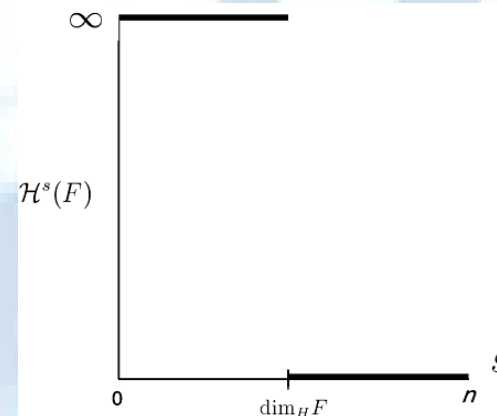
Dado un conjunto  $F$ , se define

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\}$$

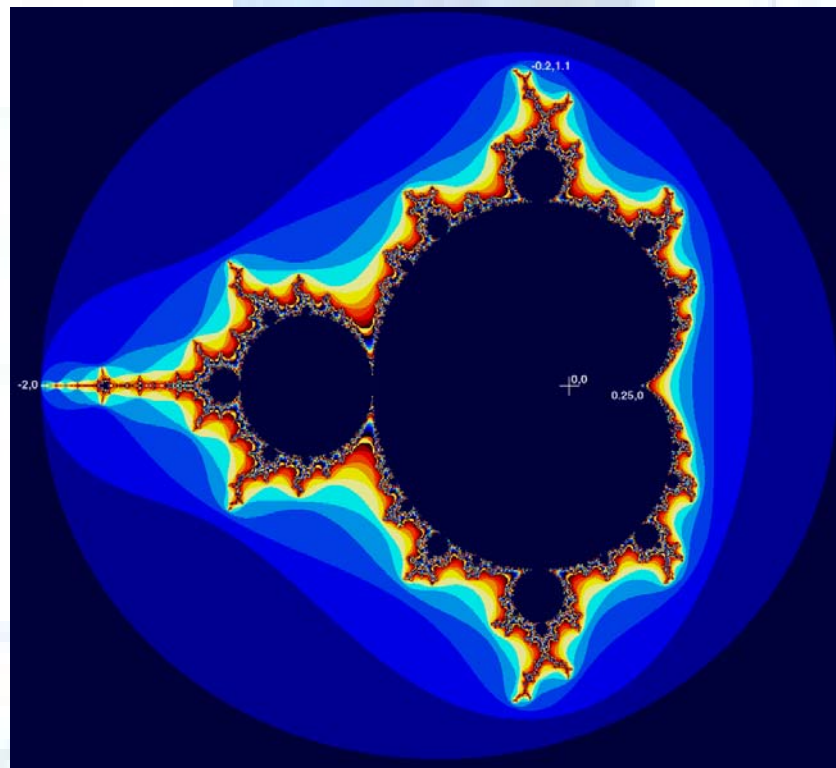
siendo  $\{U_i\}$  un recubrimiento numerable de diámetro  $< \delta$ . Sea

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

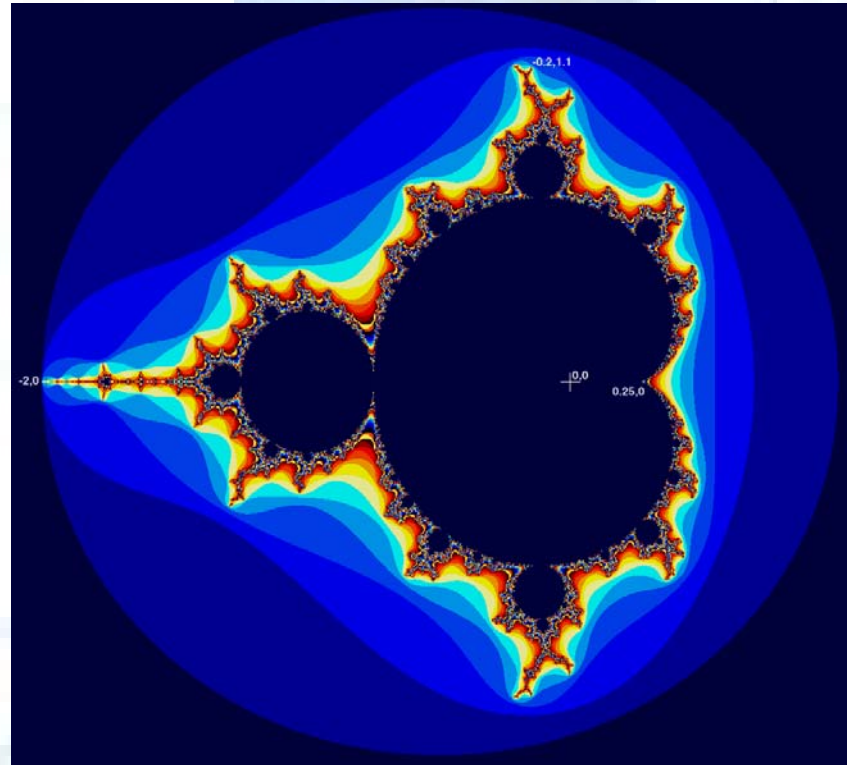
La función  $H$  se comporta como



Fractal: Conjunto cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica ¿?



Fractal: Conjunto cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica ¿?



La dimensión fractal como medida... usos en **CAOS**.

# DIMENSIÓN Y FÍSICA

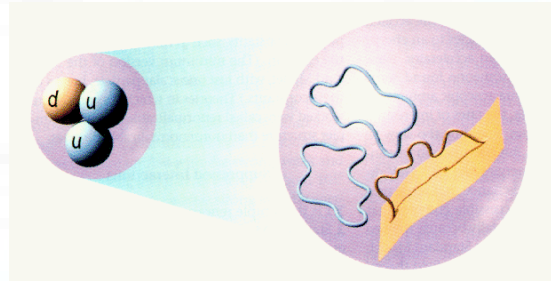
La concepción de dimensión como cada una de las magnitudes de un espacio para describir cada suceso, evoluciona del espacio físico tridimensional en dos vertientes

- La utilización de coordenadas generalizadas y, por tanto, varias dimensiones.
- La inclusión del tiempo como dimensión.

En el último punto, se destaca la *Relatividad General* (1915) de Einstein...

**...el espacio y el tiempo no se pueden separar**  
y tiene dimensión 4.

En la actualidad, una de las teorías en donde la idea de dimensión en Física se muestra más emocionante es en la **Teoría de Cuerdas**



- Surge en el intento de crear un marco consistente que explique todas las fuerzas de la naturaleza (modelo Estándar).
- Ya en tiempos de Einstein. Aunque la primera persona fue T. Kaluza (1919), añadiendo una **quinta** dimensión al espacio tiempo para unificar gravedad y electromagnetismo.
- La Teoría de cuerdas propiamente dicha se desarrolla a partir de los finales de los 60 y principios de los 70.

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.

El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

¿Cómo es que no “percibimos” esas otras dimensiones?

Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están “apretadas”) que no se detectan con los experimentos actuales.

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.

El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

¿Cómo es que no “percibimos” esas otras dimensiones?

Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están “apretadas”) que no se detectan con los experimentos actuales.



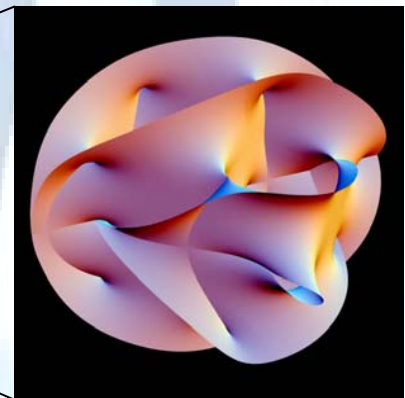
Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.

El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

¿Cómo es que no “percibimos” esas otras dimensiones?

Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están “apretadas”) que no se detectan con los experimentos actuales.



---

# BIBLIOGRAFÍA

- E. Abbot, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, Seely & Co. 1884.
  - A. Alvarez, E. Ghys, J. Leys, [www.dimensions-math.org](http://www.dimensions-math.org)
  - R. Engelkin, *Dimension theory*, North-Holland Publishing Co 1979.
  - B. Greene, *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, Norton & Company, New York 2003.
  - M. de Guzmán et al., *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Editorial Labor, Barcelona 1993.
  - L. Henderson, *The 4th dimension and non euclidean geometries in Modern Art*, Princeton University Press 1989.
  - W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press 1969.
-



# *MUCHAS GRACIAS*

***The dimension that counts for the creative person is the space he creates within himself.***

Mark Tobey, pintor (1890-1976)