IDEAS Y VISUALIZACIONES MATEMÁTICAS
LA ARITMÉTICA DE DIOFANTO

Merche Sánchez

10 de junio de 2010

.....Que 25 años....no es nada......

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales

Versión en castellano, introducción, notas y apéndices de:

Manuel Benito Muñoz

Emilio Fernández Moral

Mercedes Sánchez Benito

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621) *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Nunc primum græcé et latiné editi, atque absolutissimis Commentariis ilustrati. H. Drouart, París.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912) *Œuvres de Fermat, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. Gauthier-Villars et fils, París.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895) *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum græcis commentariis. Teubner, Leipzig.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895)
- Sir Thomas L. Heath (1910) *Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra, 2nd ed. with a supplement containing an account of Fermat's theorems and problems connected with diophantine analysis and some solutions of diophantine problems by Euler. Cambridge U. P. (corrected repub. Dover, 1964).*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895)
- Sir Thomas L. Heath (1910)
- Francisco Vera (1970) *Científicos Griegos. Recopilación, estudio preliminar,preámbulos y notas por Francisco Vera, vol. II. Aguilar, Madrid.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895)
- Sir Thomas L. Heath (1910)
- Francisco Vera (1970)
- Paul Ver Eecke (1959) *Diophante d'Alexandrie: Les Six Livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones. Œuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes. Blanchard, París.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895)
- Sir Thomas L. Heath (1910)
- Francisco Vera (1970)
- Paul Ver Eecke (1959)
- Roshdi Rashed (1984) *Diophante, Les Arithmétiques. Tome III: Livre IV. Tome IV: Livres V, VI, VII. Les Belles Lettres, París.*

Nuestras fuentes

- Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1621)
- Pierre de Fermat (ed. Tannery et Henry, 1891–1912)
- Paul Tannery (1893–1895)
- Sir Thomas L. Heath (1910)
- Francisco Vera (1970)
- Paul Ver Eecke (1959)
- Roshdi Rashed (1984)

La Aritmética

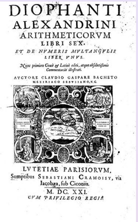
La *Aritmética*, según dice el propio Diofanto en el preámbulo del *Libro I* comprendía trece libros. En la actualidad se conocen seis, de los que se han conservado multitud de copias manuscritas.
La primera traducción latina de los textos griegos se debe a Xilander (Basilea 1575).

La *Aritmética*, según dice el propio Diofanto en el preámbulo del *Libro I* comprendía trece libros. En la actualidad se conocen seis, de los que se han conservado multitud de copias manuscritas.
La primera traducción latina de los textos griegos se debe a Xilander (Basilea 1575).

En 1621 apareció une edición comentada de Bachet de Méziriac.

La *Aritmética*, según dice el propio Diofanto en el preámbulo del *Libro I* comprendía trece libros. En la actualidad se conocen seis, de los que se han conservado multitud de copias manuscritas.

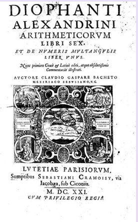
La primera traducción latina de los textos griegos se debe a Xilander (Basilea 1575).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus Sebastiani Cramoisy, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

En 1621 apareció une edición comentada de Bachet de Méziriac.

La *Aritmética*, según dice el propio Diofanto en el preámbulo del *Libro I* comprendía trece libros. En la actualidad se conocen seis, de los que se han conservado multitud de copias manuscritas.

La primera traducción latina de los textos griegos se debe a Xilander (Basilea 1575).



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

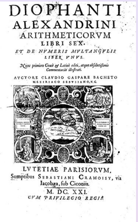
En 1621 apareció une edición comentada de Bachet de Méziriac.

En 1670 el hijo de Pierre de Fermat publicó una nueva edición con los comentarios de su padre.

La Aritmética

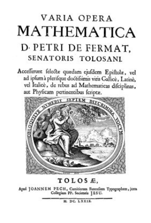
La *Aritmética*, según dice el propio Diofanto en el preámbulo del *Libro I* comprendía trece libros. En la actualidad se conocen seis, de los que se han conservado multitud de copias manuscritas.

La primera traducción latina de los textos griegos se debe a Xilander (Basilea 1575).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

En 1621 apareció une edición comentada de Bachet de Méziriac.

En 1670 el hijo de Pierre de Fermat publicó una nueva edición con los comentarios de su padre.


VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, aut Physicam pertinentibus scriptæ.
TOLOSÆ,
Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta Collegium PP. Societatis JESU.
M. DC. LXXIX.

La Aritmética

La *Aritmética* no es una obra teórica sino que es una colección de problemas (189) con una o más soluciones en números racionales y con algunas explicaciones relevantes. Hoy día llamamos ecuación diofántica a cualquier ecuación planteada sobre el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, con soluciones enteras.

No hay ninguna clasificación aparente, salvo en el *Libro VI*, dedicado a triángulos rectángulos de lados racionales, o en el *Libro IV* titulado "De cuadrados y cubos".

La selección de los problemas es muy cuidadosa. A veces, la solución incluye la condición que deben cumplir los datos para que el problema tenga solución. Y en ocasiones se encuentra algún resultado más general, por ejemplo, que ningún número primo de la forma $4n + 3$ se puede escribir como suma de dos cuadrados.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

Todos los números están compuestos por una determinada cantidad de unidades, admitiendo claramente cualquier agregación hasta el infinito.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

De manera que,entre ellos, los hay que son *cuadrados*, resultantes de la multiplicación de un número denominado *lado* del cuadrado, por sí mismo.Denominaré así al cuadrado ($\tau\varepsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu o\varsigma$) y lo denotaré mediante una letra Δ con un superíndice Υ, es decir, Δ^{Υ}.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

Los hay *cubos* , que resultan al multiplicar los cuadrados por sus correspondientes lados , cuya notación será la letra K con un superíndice Υ, es decir, K^{Υ}.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

El producto del cuadrado por sí mismo es el *cuadrado-cuadrado*, que se denotará mediante una doble $\varDelta$ con un superíndice $\varUpsilon$, es decir, $\varDelta^{\varUpsilon}\varDelta$.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

El producto del cuadrado por el cubo del mismo lado es el *cuadrado-cubo* , y se denotará mediante las letras ΔK con un superíndice Υ, es decir, ΔK^{Υ}.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

Lo que resulta de multiplicar el cubo por sí mismo es el *cubo-cubo*, y se denotará mediante una doble K con un superíndice Υ, es decir, $K^{\Upsilon}K$.

En esta obra se da un paso muy importante para pasar del álgebra verbal hacia el álgebra simbólica.

En el libro I

El número a secas [incógnita], que no posee ninguna de estas propiedades y consta de una cantidad de unidades indeterminada se llamará simplemente *número* (ἀριθμὸς), y se denotará mediante el signo ϛ.

Y aún queda otro signo para denotar una cantidad de unidades determinada y constante, una letra M con un superíndice O, es decir, M^o.

La *Aritmética* de Diofanto, es un texto que ha tenido una gran relevancia para el desarrollo posterior del Álgebra.

Hay quien afirma que no es ninguna exageración decir que su papel se puede comparar al de de la obra de Arquímedes en la historia del Cálculo diferencial e integral.

La Aritmética ha inspirado muchas investigaciones a lo largo de la historia.
En ella han trabajado, bien directa o indirectamente:

Vieta, Bachet, Fermat, Descartes, Euler, Jacobi, Lagrange, Legendre, Dirichlet, Kummer, Henri Poincaré, André Weil, Ramanujan y muchos otros.

Problema II-8

Problema I-27

I-27: Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.

Es decir, dados a y b, encontrar x, y tales que $x + y = a$, $xy = b$

Problema I-27

I-27: Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.

Es decir, dados a y b, encontrar x, y tales que $x + y = a$, $xy = b$

Es necesario que $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \square$ [para solución racional].

Problema I-27

I-27: Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.

Es decir, dados a y b, encontrar x, y tales que $x + y = a$, $xy = b$

Es necesario que $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \square$ [para solución racional].

Como señala Bachet, porque se tiene la identidad

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

La frase *ἔστι δὲ τοῦτο πλασματικόν*, que sigue en el texto griego a la condición necesaria ha sido de interpretación problemática. La opinión de Bachet al respecto es que Diofanto estaba en posesión de las fórmulas para resolver ecuaciones de segundo grado.

I-27: Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.

Es decir, dados a y b, encontrar x, y tales que $x + y = a$, $xy = b$

Es necesario que $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = \square$ [para solución racional].

Sean $a = 20$ y $b = 96$ $[10^2 - 96 = 2^2]$.

Pongamos $x - y = 2\alpha$. Como $x + y = 20$, resultan [problema *I-1*] $x = 10 + \alpha$, $y = 10 - \alpha$.

De aquí, $xy = 100 - \alpha^2 = 96$, luego $\alpha = 2$, $x = 12$, $y = 8$.

Problema II-8

II-8: Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados

Es decir, dado a, encontrar x, y tales que $x^2 + y^2 = a^2$

II-8: Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados

Es decir, dado a, encontrar x, y tales que $x^2 + y^2 = a^2$

Diofanto presenta de dos maneras su solución a este problema. La segunda de ellas es así:

II-8: Descomponer un cuadrado dado en dos cuadrados

Es decir, dado a, encontrar x, y tales que $x^2 + y^2 = a^2$

Sea 16 el cuadrado a descomponer en dos cuadrados. Pongamos que el lado del primero de éstos sea $x = \alpha$ y el lado del segundo $m\alpha - 4$ con m [entero positivo] arbitrario y donde 4 es la raíz de 16; por ejemplo [con $m = 2$], $y = 2\alpha - 4$. Los cuadrados serán $x^2 = \alpha^2$ e $y^2 = 4\alpha^2 + 16 - 16\alpha$. Queda imponer que su suma sea 16, luego $5\alpha^2 + 16 - 16\alpha = 16$, de donde resulta $\alpha = \frac{16}{5}$.

Serán así $x = \frac{16}{5}$ el lado del primer cuadrado, y el propio cuadrado $x^2 = \frac{256}{25}$; $y = \frac{12}{5}$ el lado del segundo cuadrado, y el propio cuadrado $y^2 = \frac{144}{25}$; la suma es $\frac{400}{25} = 16$.

Problema II-8: Comentario de Bachet

Bachet obtiene la solución general ($a > 0$, $m > n$)

$$x = \frac{2mna}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{(m^2 - n^2)a}{m^2 + n^2}$$

Problema II-8: Comentario de Bachet

Bachet obtiene la solución general ($a > 0$, $m > n$)

$$x = \frac{2mna}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{(m^2 - n^2)a}{m^2 + n^2}$$

(A partir de la identificación $a^2 \equiv (n\alpha)^2 + (m\alpha - a)^2$)

Bachet obtiene la solución general ($a > 0$, $m > n$)

$$x = \frac{2mna}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{(m^2 - n^2)a}{m^2 + n^2}$$

Y la presenta de un modo didáctico :

Problema II-8: Comentario de Bachet

Bachet obtiene la solución general ($a > 0$, $m > n$)

$$x = \frac{2mna}{m^2 + n^2}, \quad y = \frac{(m^2 - n^2)a}{m^2 + n^2}$$

Para descomponer a^2 en suma de dos cuadrados, tómese una división (siempre posible en números racionales) $a = u + v$ en dos números planos semejantes y distintos (es decir, como $u = m^2\lambda$ y $v = n^2\lambda$); entonces, los números $x = |u - v|$ e $y = 2\sqrt{uv}$ serán los lados de los cuadrados de una tal descomposición. Por ejemplo, de $7 = 1 \cdot \frac{7}{5} + 4 \cdot \frac{7}{5}$ resulta $7^2 = \left(\frac{21}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2$.

Problema II-8: Comentario de Bachet

Así se obtienen, además, todas las descomposiciones posibles de un cuadrado (entero) en dos cuadrados enteros.

Es decir, para a, x, y enteros positivos, se tiene

$$a^2 = x^2 + y^2 \overset{\text{esencialmente}}{\Longleftrightarrow} a = u + v,\ \ x = |u - v|,\ \ y = 2\sqrt{uv}$$

donde $u = m^2\lambda$, $v = n^2\lambda$ (m, n, λ también enteros positivos).

Por ejemplo, 65 *se compone cuatro veces de dos enteros planos semejantes, a saber,* $65 = 1 + 64 = 13 + 52 = 16 + 49 = 20 + 45$*.*
A partir de ello se encuentran las cuatro descomposiciones de 65^2 *en suma de dos cuadrados:*
$65^2 = 63^2 + 16^2 = 39^2 + 52^2 = 33^2 + 56^2 = 25^2 + 60^2$.

Problema II-8: Observación de Fermat

Fermat añadió, al margen de la primera solución a este problema en su ejemplar de Bachet, su más célebre observación sobre Diofanto:

Problema II-8: Observación de Fermat

Fermat añadió, al margen de la primera solución a este problema en su ejemplar de Bachet, su más célebre observación sobre Diofanto:

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quod continet latus ipsius 16. esto a 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & a similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$ & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ιϛ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς. ὅσων δή ποτε λείψει τοσούτων μο ὅσων ἐστὶν ἡ τῶν ιϛ μο πλευρά. ἔστω ςς β λείψει μο δ. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ μο ιϛ λείψει ςς ιϛ. ταῦτα ἴσα μονάσι ιϛ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε ἴσαι ἀριθμοῖς ιϛ. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ιϛ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνϛ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι υ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ιϛ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Problema II-8: Observación de Fermat

Observación 2: *Ad quæstionem VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libr. II*

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Problema II-8: Observación de Fermat

Observación 2: *Ad quæstionem VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libr. II*

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Por el contrario, no se puede dividir un cubo en dos cubos, ni un bicuadrado en dos bicuadrados, ni en general una potencia superior al cuadrado, hasta el infinito, en dos potencias del mismo grado: he encontrado una demostración verdaderamente admirable de esta afirmación. La exigüidad del margen no podría contenerla.

Problema II-8: Observación de Fermat

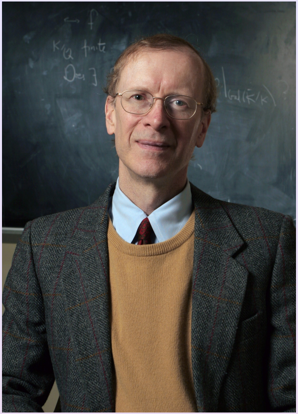
Observación 2: *Ad quæstionem VIII Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libr. II*

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Por el contrario, no se puede dividir un cubo en dos cubos, ni un bicuadrado en dos bicuadrados, ni en general una potencia superior al cuadrado, hasta el infinito, en dos potencias del mismo grado: he encontrado una demostración verdaderamente admirable de esta afirmación. La exigüidad del margen no podría contenerla.

Hubo que esperar a Andrew Wiles hasta 1993

Problema II-8: Observación de Fermat



Problema III-15

III-15: Encontrar tres números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, aumentado en la suma de los dos, forme un cuadrado

Es decir, encontrar x, y, z tales que

$$xy + x + y = \square, \quad yz + y + z = \square, \quad xz + x + z = \square$$

Problema III-15

$$xy + x + y = \square, \quad yz + y + z = \square, \quad xz + x + z = \square$$

$$xy + x + y = \square, \quad yz + y + z = \square, \quad xz + x + z = \square$$

Diofanto da dos soluciones a este problema. La primera de ellas es así:

Problema III-15

$$xy + x + y = \square, \quad yz + y + z = \square, \quad xz + x + z = \square$$

El producto de los cuadrados de dos números consecutivos cualesquiera, aumentado en su suma, es un cuadrado $[a^2(a+1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = (a^2+a+1)^2]$. Pongamos primero $x = 4$, $y = 9$; así, $xy + x + y = 36 + 4 + 9 = 7^2$. Poniendo después $z = \alpha$, las dos condiciones restantes forman la ecuación doble [sistemas que aparecen por primera vez en el problema *II-11*]

$$yz + (y+z) = 10\alpha + 9 = \square, \quad xz + (x+z) = 5\alpha + 4 = \blacksquare.$$

La diferencia de estos cuadrados es $\square - \blacksquare = 5\alpha + 5 = 5(\alpha+1)$. Identificando el cuadrado de la semisuma de estos dos factores con el cuadrado mayor $\square$ $[\frac{(\alpha+6)^2}{4} = \frac{\alpha^2+12\alpha+36}{4} \equiv 10\alpha + 9]$, resulta $\alpha = 28$. Los números buscados son $x = 4$, $y = 9$, $z = 28$.

Problema III-15: Comentario de Bachet

Bachet en su comentario al problema *IV-39*, explica una técnica que permite encontrar infinitas soluciones racionales de la ecuación doble que ha planteado Diofanto en este problema.

Problema III-15: Comentario de Bachet

$$10\alpha + 9 = \square, \quad 5\alpha + 4 = \blacksquare$$

Problema III-15: Comentario de Bachet

$$10\alpha + 9 = \square, \quad 5\alpha + 4 = \blacksquare$$

Póngase $\blacksquare = \beta^2$. Entonces

$$\square = 2\beta^2 + 1 \equiv (1 - m\beta)^2,$$

de donde

$$\beta = \frac{2m}{m^2 - 2}$$

y si $\sqrt{2} < m < 2$ entonces $\beta > 2$ y así $\alpha > 0$. Cuando $m = \frac{3}{2}$ resulta $\beta = 12$ y la solución de Diofanto $\alpha = 28$.
Entre estos márgenes para valores de m racionales, se tienen las infinitas soluciones de la ecuación doble:

$$\alpha = \frac{\beta^2 - 4}{5} = \frac{-4m^4 + 20m^2 - 16}{5(m^2 - 2)^2}$$

Problema III-15: Observación de Fermat

. . . Se puede ir más lejos y extender el problema de Diofanto. Así, yo puedo proporcionar infinitas soluciones del siguiente problema:
Encontrar cuatro números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, aumentado en la suma de los mismos dos, sea un cuadrado.
Se buscarán, como en V-5, tres cuadrados tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, aumentado en la suma de esos dos cuadrados, forme un cuadrado. Sean, por ejemplo, los tres cuadrados que allí da Diofanto: $\frac{25}{9}$, $\frac{64}{9}$, $\frac{196}{9}$ *; tomémoslos como los tres primeros números de nuestro problema; sea* x *el cuarto; formando su producto con cada uno de los precedentes y añadiendo la suma de los dos factores, tendremos*

$$\frac{34}{9}x + \frac{25}{9} = \square, \quad \frac{73}{9}x + \frac{64}{9} = \square, \quad \frac{205}{9}x + \frac{196}{9} = \square,$$

ecuación triple que he enseñado a resolver . . .

$$\frac{34}{9}x+\frac{25}{9}=\square, \quad \frac{73}{9}x+\frac{64}{9}=\square, \quad \frac{205}{9}x+\frac{196}{9}=\square$$

$$\frac{34}{9}x + \frac{25}{9} = \square, \quad \frac{73}{9}x + \frac{64}{9} = \square, \quad \frac{205}{9}x + \frac{196}{9} = \square$$

Heath presenta la solución negativa

$$x_1 = -\frac{459818598496844787200}{631629004828419699201}$$

y deja "a la imaginación", como Fermat, la presentación explícita de una solución positiva de esta ecuación triple.

$$\frac{34}{9}x+\frac{25}{9}=\square, \quad \frac{73}{9}x+\frac{64}{9}=\square, \quad \frac{205}{9}x+\frac{196}{9}=\square$$

Heath presenta la solución negativa

$$x_1=-\frac{459818598496844787200}{631629004828419699201}$$

y deja "a la imaginación", como Fermat, la presentación explícita de una solución positiva de esta ecuación triple.
Usando el método de Schaewen , podemos llegar hoy, iterando sobre la solución de Heath, a la solución positiva

$$x_2=\frac{382213056749646052991941347628756910312556108788066321206302779707083769024259177128201\dashrightarrow}{641509587595732997016523003086874374729029262543433048868081576659320670262782297013 6\dashrightarrow}$$

$$\frac{758649158538608908872103623687680 0}{291871862803963849818378129579520 1}$$

$$\approx\frac{3{,}822\cdot 10^{120}}{6{,}415\cdot 10^{118}}\,.$$

Problema III-15: La ecuación triple de Fermat

$$\frac{34}{9}x+\frac{25}{9}=\square, \qquad \frac{73}{9}x+\frac{64}{9}=\square, \qquad \frac{205}{9}x+\frac{196}{9}=\square$$

$$x_2=\frac{3822130567496460529919413476287569103125561087880663212063027797070837690242591771282 01\dashrightarrow}{6415095875957329970165230030868743747290292625434330488680815766593206702627822970136\dashrightarrow}$$

$$\frac{758649158538608908872103623687680 0}{291871862803963849818378129579520 1}$$

$$\approx \frac{3{,}822\cdot 10^{120}}{6{,}415\cdot 10^{118}}\,.$$

Por otra parte, con un sencillo programa de ordenador hemos encontrado la solución $x_1^*=-\dfrac{50176}{72361}$.

Iterando a partir de ella, se llega a obtener la solución positiva

$$x_2^*=\frac{33146301373782301772772858954230285761713872064000}{10353552507903865387708233954169625159482362272929}\approx\frac{3{,}315\cdot 10^{49}}{1{,}035\cdot 10^{49}},$$

"mucho más pequeña" que la x_2 anterior.

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Euler (E.793), considerando la identidad
$xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$, reformula el problema de Diofanto, y la extensión de Fermat, como:

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.

Para tres números obtiene (de dos maneras) familias infinitas de soluciones enteras.

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.

Para cuatro números presenta la familia de soluciones racionales

$$A = \frac{m(f^2+g^2)}{2nfg}, \qquad B = \frac{n(9f^2+g^2)}{2mfg},$$

$$C = \frac{(m+3n)^2f^2+(m-n)^2g^2}{8mnfg}, \quad D = \frac{(m-3n)^2f^2+(m+n)^2g^2}{8mnfg},$$

(m, n, f, g enteros), y pregunta si no se podrán encontrar cuaternas enteras no triviales con esta propiedad:

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.

134 L. EULERI OPERA POSTHUMA. *Arithmetica.*

Cum autem hae solutiones omnes in numeris fractis consistant praeter simplicissimam, quae es

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5, \quad D = 1,$$

quaestio oritur satis curiosa, num praeterea non aliae solutiones in numeris integris reperiri queant

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.

134 L. EULERI OPERA POSTHUMA. Arithmetica.

Cum autem hae solutiones omnes in numeris fractis consistant praeter simplicissimam, quae es

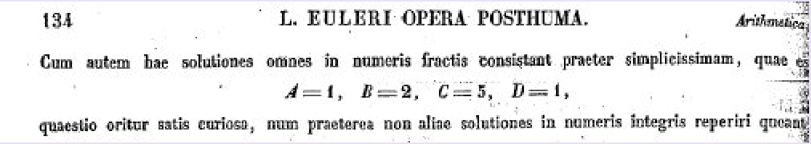
$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5, \quad D = 1,$$

quaestio oritur satis curiosa, num praeterea non aliae solutiones in numeris integris reperiri queant

En 2002, Andrej Dujella (Universidad de Zagreb, Croacia) obtuvo una familia infinita de quíntuplas racionales con la misma propiedad, y en 2005 ha probado finalmente que no hay cuaternas enteras formadas por cuatro números diferentes, contestando negativamente a la curiosa pregunta de Euler.

Problema III-15: Desde Euler hasta hoy

Encontrar tres (o cuatro) números $A, B, C, (D)$ tales que el producto de cada dos, disminuido en una unidad, sea un cuadrado perfecto.


134 L. EULERI OPERA POSTHUMA. *Arithmetica*

Cum autem hae solutiones omnes in numeris fractis consistant praeter simplicissimam, quae est

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5, \quad D = 1,$$

quaestio oritur satis curiosa, num praeterea non aliae solutiones in numeris integris reperiri queant

IV-29: Encontrar cuatro cuadrados cuya suma, aumentada en la suma de sus lados, sea un número dado

Es decir, encontrar x, y, z, v tales que

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + x + y + z + v = a$$

Problema IV-29

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + x + y + z + v = a}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + x + y + z + v = a}$$

Sea $a = 12$ el número dado. Aplicaremos la identidad

$$\ell^2 + \ell + \tfrac{1}{4} = \left(\ell + \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Descomponemos en primer lugar el número $12 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 13$ en cuatro cuadrados; al restar $\frac{1}{2}$ unidad del lado de cada uno de esos cuadrados tendremos los lados de los cuadrados buscados:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+v^2+x+y+z+v=a}$$

Sea $a=12$ el número dado. Aplicaremos la identidad

$$\ell^2+\ell+\tfrac{1}{4}=\left(\ell+\tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Descomponemos en primer lugar el número $12+4\cdot\frac{1}{4}=13$ en cuatro cuadrados; al restar $\frac{1}{2}$ unidad del lado de cada uno de esos cuadrados tendremos los lados de los cuadrados buscados:

$$\begin{aligned}13=4+9&=\left(\tfrac{64}{25}+\tfrac{36}{25}\right)+\left(\tfrac{144}{25}+\tfrac{81}{25}\right)\\&=\left(\tfrac{8}{5}\right)^2+\left(\tfrac{6}{5}\right)^2+\left(\tfrac{12}{5}\right)^2+\left(\tfrac{9}{5}\right)^2.\end{aligned}$$

Entonces los lados de los cuadrados buscados son

$$x=\frac{8}{5}-\frac{1}{2}=\frac{11}{10}\,,\ y=\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{7}{10}\,,\ z=\frac{12}{5}-\frac{1}{2}=\frac{19}{10}\,,\ v=\frac{9}{5}-\frac{1}{2}=\frac{13}{10}\,.$$

Problema IV-29: Comentario (y teorema) de Bachet

Respecto de la posibilidad de descomponer un número [como el $a + 1$ del problema] en cuatro cuadrados, para lo que Diofanto no ha señalado ninguna condición necesaria, dándola tácitamente por segura, Bachet aporta una tabla donde muestra la descomposición en uno, dos, tres o cuatro cuadrados enteros de todos los números entre 1 y 120 (añade que ha llegado hasta 325), confirmando así inductivamente la veracidad del teorema, que él por primera vez está enunciando aquí:

Todo número entero (positivo) es un cuadrado, o suma de dos, tres o a lo sumo cuatro cuadrados:

Problema IV-29: Comentario (y teorema) de Bachet

Respecto de la posibilidad de descomponer un número [como el $a + 1$ del problema] en cuatro cuadrados, para lo que Diofanto no ha señalado ninguna condición necesaria, dándola tácitamente por segura, Bachet aporta una tabla donde muestra la descomposición en uno, dos, tres o cuatro cuadrados enteros de todos los números entre 1 y 120 (añade que ha llegado hasta 325), confirmando así inductivamente la veracidad del teorema, que él por primera vez está enunciando aquí:

Todo número entero (positivo) es un cuadrado, o suma de dos, tres o a lo sumo cuatro cuadrados:

“ Confieso que aún no he podido conseguir una demostración, cosa que agradeceré muchísimo a quien lo haga, porque además no sólo en este problema, sino en algunos otros del Libro V se ve que Diofanto ha dado esto por supuesto.”

Problema IV-29: Comentario (y teorema) de Bachet

octauam secundi, iam totus numerus in quatuor quadratos diuisus erit. Omnem autem numerum vel quadratum esse, vel ex duobus, aut tribus, aut saltem quatuor quadratis componi satis experiendo deprehendes. Mihi sanè perfectam id demonstratione assequi nondum licuit, quam qui proferet maximas ei habebo gratias, præsertim cùm non solùm in hac quæstione, sed & in nonnullis libri quinti hoc supponere videatur Diophătus. Interim libet id inductione confirmare, ostendendo propositũ esse numerorum omnium ab 1. vsque ad 120. vt constat ex sequenti diagrammate.

1. Quadratus.
2. ex 1. 1.
3. ex 1. 1. 1.
4. Quadratus.
5. ex 1. 4.
6. ex 1. 4. 1.
7. ex 1. 1. 1. 4.
8. ex 4. 4.
9. Quadratus.
10. ex 1. 9.
11. ex 1. 1. 9.
12. ex 4. 4. 4. vel 1. 1. 1. 9.
13. ex 4. 9.

37. ex 1. 36.
38. ex 1. 1. 36.
39. ex 1. 1. 1. 36. vel 1. 4. 9. 25.
40. ex 4. 36.
41. ex 16. 25. vel 1. 4. 36.
42. ex 1. 16. 25.
43. ex 9. 9. 25. vel 1. 1. 16. 25.
44. ex 4. 4. 36.
45. ex 9. 36. vel 4. 16. 25.
46. ex 1. 9. 36. vel 1. 4. 16. 25.
47. ex 1. 1. 9. 36. vel 4. 9. 9. 25.
48. ex 16. 16. 16. vel 4. 4. 4. 36.
49. Quadratus.

Problema IV-29: Comentario (y teorema) de Bachet

73. ex 9. 64.
74. ex 25. 49.
75. ex 1. 25. 49.
76. ex 4 36. 36. vel 1. 1. 25. 49.
77. ex 4. 9. 64.
78. ex 4. 25. 49.
79. ex 1. 4. 25. 49. vel 9. 9. 25. 36.
80. ex 16. 64.
81. Quadratus.
82. ex 1. 81.
83. ex 1. 1. 81. vel 9. 25. 49.
84. ex 4. 16. 64.
85. ex 4. 81. vel 36. 49.
86. ex 1. 4. 81. vel 1. 36. 49.
87. ex 1. 1. 4. 81. vel 1. 1. 36. 49.
88. ex 16 16. 36.
89. ex 25. 64.
90. ex 9. 81.
91. ex 1. 9. 81.
92. ex 1. 1. 9. 81. vel 4. 16. 36. 36. vel 9. 9. [25. 49.
93. ex 4. 25. 64.
94. ex 4. 9. 81. vel 9. 36. 49.
95. ex 1. 4. 9. 81. vel 1. 9. 36. 49.
96. ex 16. 16. 64.
97. ex 16. 81.
98. ex 49. 49. vel 1. 16. 81.
99. ex 1. 49. 49. vel 9. 9. 81.
100. Quadratus.
101. ex 1. 100.
102. ex 1. 1. 100.
103. ex 1. 1. 1. 100. vel 4. 9. 9. 81. vel 4. 25. 25. 49. vel 9. 9. 36. 49.
104. ex 4. 100.
105. ex 1. 4. 100.
106. ex 25. 81.
107. ex 1. 25. 81.
108. ex 36. 36. 36. vel 1. 1. 25. 81.
109. ex 9. 100.
110. ex 1. 9. 100.
111. ex 1. 1. 9. 100.
112. ex 4. 4. 4. 100. vel 4. 36. 36. 36. vel 16. 16. 16. 64.
113. ex 49. 64.
114. ex 1. 49. 64.
115. ex 9. 25. 81.
116. ex 16. 100.
117. ex 36. 81.
118. ex 1. 36. 81.
119. ex 9. 25. 36. 49.
120. ex 4. 16. 100.

Tu, ſi vacat vlterius experiare licebit. Ego ſanè de omnibus numeris vſque ad 325. experimentum ſumpſi. Facile autem ad quodlibet quadratos extendetur quæſtio ſed

XVIII (p. 180).

(Ad commentarium in quæstion. XXXI Libr. IV.)

Quæstio : Invenire quatuor numeros quadratos, quorum summa, cum summâ laterum conjuncta, numerum imperatum faciat (1).

Imo propositionem pulcherrimam et maxime generalem nos primi deteximus : nempe omnem numerum vel esse triangulum vel ex duobus aut tribus triangulis compositum; esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum; esse pentagonum vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositum; et sic deinceps in infinitum, in hexagonis, heptagonis et polygonis quibuslibet, enuntiandâ videlicet pro numero angulorum generali et mirabili propositione.

Ejus autem demonstrationem, quæ ex multis variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet : opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hac in parte ultra veteres et notos terminos mirum in modum promovere.

Problema IV-29: Observación (y teorema) de Fermat

18. — **Commentaire de Bachet sur IV, 31.**

« Bachet (proposition empirique) : Tout nombre est soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés entiers. »

Bien plus, il y a une proposition très belle et tout à fait générale que j'ai été le premier à découvrir :

Tout nombre est : soit triangle, soit somme de 2 ou 3 triangles;

Soit carré, soit somme de 2, 3 ou 4 carrés;

Soit pentagone, soit somme de 2, 3, 4 ou 5 pentagones;

et ainsi de suite indéfiniment, qu'il s'agisse d'hexagones, d'heptagones ou de polygones quelconques; cette merveilleuse proposition pouvant s'énoncer en général en raison du nombre des angles.

Je ne puis en donner ici la démonstration, qui dépend de nombreux et abstrus mystères de la Science des nombres; j'ai l'intention de consacrer à ce sujet un Livre entier et de faire accomplir ainsi à cette partie de l'Arithmétique des progrès étonnants au delà des bornes anciennement connues.

Problema IV-29: Observación (y teorema) de Fermat

La sucesión de *números m-gonales* es la de sumas sucesivas de la progresión aritmética $1, m-1, 2m-3, 3m-5, \ldots,$ es decir, la sucesión $(j = 1, 2, 3, \ldots)$

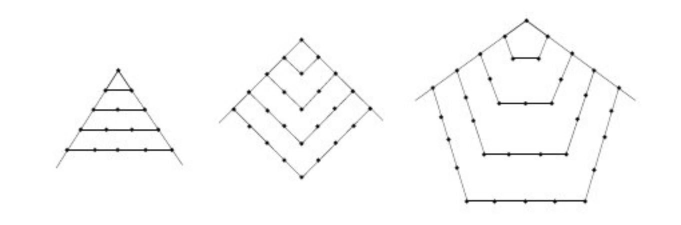
$$P_m(j)\colon 1, m, 3m-3, \ldots, \tfrac{1}{2}j(j-1)m - j(j-2), \ldots$$

Diofanto dedica al estudio de estos números su *Libro sobre los números poligonales*.

La sucesión de *números m-gonales* es la de sumas sucesivas de la progresión aritmética $1, m-1, 2m-3, 3m-5, \ldots$, es decir, la sucesión ($j = 1, 2, 3, \ldots$)

$$P_m(j)\colon 1, m, 3m-3, \ldots, \tfrac{1}{2}j(j-1)m - j(j-2), \ldots$$

Diofanto dedica al estudio de estos números su *Libro sobre los números poligonales*.



Problema IV-29: Observación (y teorema) de Fermat

Aún más, hay una proposición muy bella y completamente general que hemos sido los primeros en descubrir:

Todo número es: o bien triangular, o bien la suma de 2 o 3 números triangulares. Cuadrado, o suma de 2, 3 o 4 cuadrados. Pentagonal, o suma de 2, 3, 4 o 5 pentagonales. Y así sucesiva e indefinidamente, ya sea hexagonales, heptagonales o poligonales cualesquiera; pudiéndose enunciar según el número de ángulos esta general y admirable proposición.

No puedo escribir aquí la demostración, que depende de numerosos y muy abstrusos misterios de la ciencia de los números; tengo la intención de dedicar un libro completo a este tema, extendiendo así a esta parte de la Aritmética progresos asombrosos más allá de los límites antiguamente conocidos.

Problema IV-29: Observación (y teorema) de Fermat

Es bastante improbable que Fermat tuviera una demostración de este resultado, pues cuando en 1636 se lo comunica por carta a Mersenne, le dice que está a la espera de una solución.

En esa carta Fermat añade el siguiente resultado (auxiliar para probar el teorema de los cuatro cuadrados):
Todo número de la forma $8n-1$ *es suma de a lo sumo cuatro cuadrados, no sólo en enteros, cosa que otros pueden ver, sino también en fracciones, cosa que yo he demostrado.*

En 1645 envía el problema a Pascal indicando que, para probarlo, hay que demostrar que todo primo de la forma $4n+1$ es suma de dos cuadrados.
La demostración de este resultado se debe a Euler: De Numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum.1758.

Problema IV-29: De Euler a Cauchy

- Carta de Euler a Clairaut (1742). Acerca de si Fermat pudo probar o no el caso $m = 4$: *Ce seroit un grand avantage ... si l'on publiait ces demonstrations, peut être que les papiers de ce grand homme se trouvent encore quelque part*.

Problema IV-29: De Euler a Cauchy

- Caso $m = 4$: Identidad de Euler (1748, en carta a Goldbach). No hay traza de nada parecido en los escritos conservados de Fermat:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = x^2 + y^2 + z^2 + v^2,$$

donde

$$x = ap + bq + cr + ds, \quad y = aq - bp \pm cs \mp dr,$$
$$z = ar \mp bs - cp \pm dq, \quad v = as \pm br \mp cq - dp.$$

- Caso $m = 4$: Identidad de Euler (1748, en carta a Goldbach).
- Lagrange (1770): primera demostración del caso $m = 4$.
  Lagrange utiliza la identidad de Euler, y la técnica del "descenso infinito" de Fermat.

Problema IV-29: De Euler a Cauchy

- Caso $m = 4$: Identidad de Euler (1748, en carta a Goldbach).
- Lagrange (1770): primera demostración del caso $m = 4$.
- Euler (1773): nueva demostración del caso $m = 4$. Euler felicita a Lagrange por su gran logro. Euler presentó también un acercamiento al teorema general de Fermat mediante funciones generatrices.

- Caso $m = 4$: Identidad de Euler (1748, en carta a Goldbach).
- Lagrange (1770): primera demostración del caso $m = 4$.
- Euler (1773): nueva demostración del caso $m = 4$.
- Legendre (1798) y Gauss (1801): demostraciones independientes del caso $m = 3$.

Problema IV-29: De Euler a Cauchy

- Caso $m = 4$: Identidad de Euler (1748, en carta a Goldbach).
- Lagrange (1770): primera demostración del caso $m = 4$.
- Euler (1773): nueva demostración del caso $m = 4$.
- Legendre (1798) y Gauss (1801): demostraciones independientes del caso $m = 3$.
- Cauchy (1813): demostración, con técnicas algebraicas y analíticas, del teorema general de Fermat.

Lema II para V-7: Encontrar tres triángulos rectángulos (de lados racionales) de igual área

Lema II para V-7: Encontrar tres triángulos rectángulos (de lados racionales) de igual área

Diofanto recurre a lo que llama, con familiaridad,

"el triángulo rectángulo (x, y, z) construido a partir de dos números (racionales positivos) distintos u y v",

cuyos lados vienen dados por las fórmulas:

$$x = |u^2 - v^2|, \quad y = 2uv \quad \text{(catetos)}, \quad z = u^2 + v^2 \quad \text{(hipotenusa)}.$$

El área de este triángulo es $\Delta = uv|u^2 - v^2|$.

Lema II para V-7: Encontrar tres triángulos rectángulos (de lados racionales) de igual área

Y comienza (Lema I para V-7) por

encontrar dos números u_1, u_2 tales que $u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 = \Box = v^2$.

Para esto, toma $u_1 = \alpha$, $u_2 = 1$ y propone

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \Box \equiv (\alpha - 2)^2$$

De donde $\alpha = \frac{3}{5}$; así (quitando denominadores),

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5, \quad v = 7.$$

Lema II previo al problema V-7

Lema II para V-7: Encontrar tres triángulos rectángulos (de lados racionales) de igual área

Entonces, los triángulos construidos respectivamente a partir de

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \quad \text{y} \quad v = 7: && T_1(40, 42, 58), \\ u_2 &= 5 \quad \text{y} \quad v = 7: && T_2(24, 70, 74), \\ u_1 + u_2 &= 8 \quad \text{y} \quad v = 7: && T_3(15, 112, 113) \end{aligned}$$

tienen la misma área $\Delta = 840$.

(Diofanto no da más explicaciones. El tercer triángulo surge como de una "receta mágica". Pudiera haberse perdido texto original.)

Lema II para V-7: Encontrar tres triángulos rectángulos (de lados racionales) de igual área

Aclaración algebraica:

Como $u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 = v^2$, las áreas de los triángulos construidos a partir de u_1 y v, de u_2 y v, de $u_1 + u_2$ y v son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= u_1 v(v^2 - u_1^2) = u_1 v(u_1 u_2 + u_2^2) = u_1 u_2 (u_1 + u_2) v, \\
\Delta_2 &= u_2 v(v^2 - u_2^2) = u_2 v(u_1 u_2 + u_1^2) = u_1 u_2 (u_1 + u_2) v, \\
\Delta_3 &= (u_1 + u_2) v\big((u_1 + u_2)^2 - v^2\big) = u_1 u_2 (u_1 + u_2) v.
\end{aligned}$$

Lema II previo al problema V-7: visualización

En la actualidad, podemos considerar dos puntos racionales

$$A\left(\frac{5}{7}, \frac{1}{7^2}\right) \quad \text{y} \quad B\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7^2}\right)$$

de la cúbica

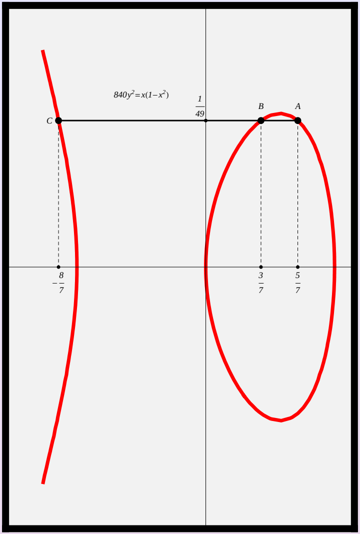
$$x(1 - x^2) = 840\, y^2.$$

El punto (x, y) de coordenadas racionales de esta curva define un triángulo rectángulo: $[(2x)^2 + (1 - x^2)^2 = (1 + x^2)^2](x > 0, y > 0)$ de área 840.

Lema II previo al problema V-7: visualización

Pero, la recta que une dos puntos racionales de la cúbica, corta de nuevo a la cúbica en un punto de coordenadas racionales. En nuestro caso, al cortar la cúbica con la recta que une los puntos A y B resulta el punto $C\left(-\frac{8}{7}, \frac{1}{7^2}\right)$.

Lema II previo al problema V-7: visualización



En particular, el punto C define el tercer triángulo de Diofanto

Lema II previo al problema V-7: Observación de Fermat

Pero yo puedo, a partir de un triángulo rectángulo cualquiera, encontrar infinitos otros de igual área que él . . . así, a los tres de Diofanto, añadiré un cuarto triángulo de igual área:

$$x = \frac{1681}{1189}\,, \quad y = \frac{1412880}{1189}\,, \quad z = \frac{1412881}{1189}\,.$$

Lema II previo al problema V-7: Observación de Fermat

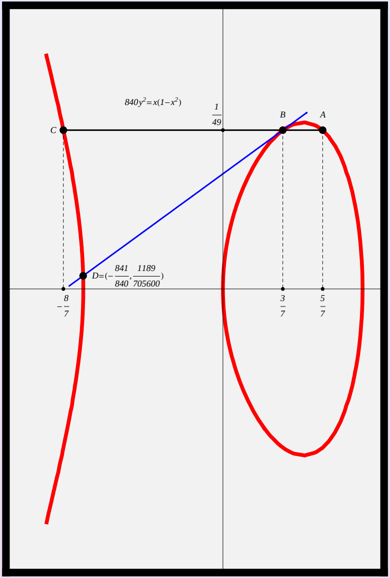
Pero yo puedo, a partir de un triángulo rectángulo cualquiera, encontrar infinitos otros de igual área que él . . . así, a los tres de Diofanto, añadiré un cuarto triángulo de igual área:

$$x = \frac{1681}{1189}, \quad y = \frac{1412880}{1189}, \quad z = \frac{1412881}{1189}.$$

El artificio algebraico que usa Fermat para ello equivale (aunque se discute si él se dio cuenta; el primero en declararlo explícitamente fue Newton) a volver a cortar la cúbica con su recta tangente en un punto racional conocido. En concreto, ese cuarto triángulo resulta cuando se calcula que la tangente en el punto $B\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7^2}\right)$ vuelve a cortar a la cúbica en el punto

$$D\left(-\frac{841}{840}, \frac{1189}{705600}\right).$$

Lema II previo al problema V-7: Observación de Fermat

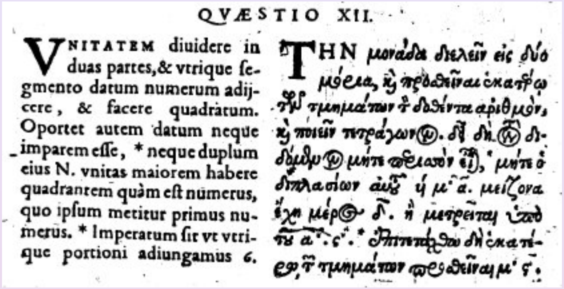


V-9: Descomponer la unidad en dos partes de modo que al añadir a cada una de ellas un mismo número dado se forme un cuadrado

Es decir, dado a, encontrar x, y tales que

$$x + y = 1, \quad x + a = \square\,, \quad y + a = \square$$

BACHET



QVÆSTIO XII.

VNITATEM diuidere in duas partes, & vtrique segmento datum numerum adijcere, & facere quadratum. Oportet autem datum neque imparem esse, * neque duplum eius N. vnitas maiorem habere quadrantem quàm est numerus, quo ipsum metitur primus numerus. * Imperatum sit vt vtrique portioni adiungamus 6.

ΤΗΝ μονάδα διελεῖν εἰς δύο μόρια, καὶ προσθεῖναι ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων τὸν δοθέντα ἀριθμόν, καὶ ποιεῖν τετράγωνον. δεῖ δὴ τὸν διδόμενον μήτε περισσὸν εἶναι, * μήτε ὁ διπλασίων αὐτοῦ ἢ μ° α. μείζονα ἔχειν μέρος δ. ἢ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ α°. ς°. * ἐπιτετάχθω δὴ ἑκατέρῳ τῶν τμημάτων προσθεῖναι μ° ς.

Problema V-9

V-9: Descomponer la unidad en dos partes de modo que al añadir a cada una de ellas un mismo número dado se forme un cuadrado

Es decir, dado a, encontrar x, y tales que

$$x + y = 1, \quad x + a = \square\,, \quad y + a = \square$$

Es necesario que el número dado a sea par, * y que $2a + 1$ no sea divisible por un número primo de la forma $4n - 1$ * [condiciones necesarias para que $2a + 1$ sea la suma de dos cuadrados].

IX.

Unitatem partiri in duas fractiones et addere 12 utrique segmento datum numerum ita ut fiat quadratus. Oportet nempe datum neque imparem esse

neque huius duplum plus 1 dividi per aliquem primum numerum qui, addito 1, habeat quadrantem.

TANNERY

Problema V-9

$$\boxed{x+y=1, \quad x+a=\square\,, \quad y+a=\blacksquare}$$

$$\boxed{x + y = 1, \quad x + a = \square, \quad y + a = \blacksquare}$$

Sea $a = 6$. Hay que descomponer el número $2a + 1 = 13$ en dos cuadrados mayores que 6, o bien en dos cuadrados cuya diferencia sea menor que 1.

Problema V-9

$$\boxed{x + y = 1, \quad x + a = \square, \quad y + a = \blacksquare}$$

Sea $a = 6$. Hay que descomponer el número $2a + 1 = 13$ en dos cuadrados mayores que 6, o bien en dos cuadrados cuya diferencia sea menor que 1.
Busquemos en primer lugar una fracción cuadrática como $\frac{1}{4\alpha^2}$ que añadida a $6\frac{1}{2}$, la mitad de 13, forme un cuadrado. Debe verificarse $26\alpha^2 + 1 = \square$. Identificando

$$26\alpha^2 + 1 \equiv (5\alpha + 1)^2,$$

resulta $\alpha = 10$ y tenemos $6\frac{1}{2} + \frac{1}{400} = \left(\frac{51}{20}\right)^2$.

$$\boxed{x + y = 1, \quad x + a = \square\,, \quad y + a = \blacksquare}$$

Sea $a = 6$. Hay que descomponer el número $2a + 1 = 13$ en dos cuadrados mayores que 6, o bien en dos cuadrados cuya diferencia sea menor que 1. Primero se ha encontrado $6\frac{1}{2} + \frac{1}{400} = \left(\frac{51}{20}\right)^2$. Vamos a descomponer ahora 13 en dos cuadrados, $\square$ y $\blacksquare$, cuyos lados se aproximen lo más posible a $\frac{51}{20}$. Como

$$13 = 2^2 + 3^2 \quad \text{y} \quad \frac{51}{20} = 2 + \frac{11}{20} = 3 - \frac{9}{20}\,,$$

pongamos $\square = (2 + 11\beta)^2$ y $\blacksquare = (3 - 9\beta)^2$. Entonces, de

$$13 \equiv (2 + 11\beta)^2 + (3 - 9\beta)^2 = 202\beta^2 - 10\beta + 13$$

resulta $\beta = \frac{5}{101}$, $\square = \left(\frac{257}{101}\right)^2$, $\blacksquare = \left(\frac{258}{101}\right)^2$,

$$x = \square - 6 = \frac{4843}{10201}\,, \quad y = \blacksquare - 6 = \frac{5358}{10201}$$

.

Problema V-9: Comentario de Bachet

- Bachet prueba primero que $2a + 1 = \square + \square \implies a$ par.

Problema V-9: Comentario de Bachet

- Bachet prueba primero que $2a + 1 = \square + \square \Longrightarrow a$ par.
- Sobre la segunda condición necesaria señala como falsa la lectura de Xilandro: *"que a sea el doble de un número primo"*

  ya que, "por ejemplo, si $a = 10$, el número 21 debiera ser suma de dos cuadrados, lo cual es imposible, según creo" [la duda está en si 21, que no es suma de dos cuadrados enteros, podría ser suma de dos cuadrados racionales]. En esta argumentación Bachet confunde condición necesaria con suficiente; la condición de Xilandro no es necesaria porque, por ejemplo, para $a = 12$, $2 \cdot 12 + 1 = 4^2 + 3^2$ pero 12 no es el doble de un primo.

  Parece que está interpretando que Diofanto quería escribir unas condiciones necesarias y suficientes.

Problema V-9: Comentario de Bachet

- Bachet prueba primero que $2a + 1 = \Box + \Box \Longrightarrow a$ par.
- Sobre la segunda condición necesaria señala como falsa la lectura de Xilandro: *"que a sea el doble de un número primo"*
- Y expone su propio tanteo: "pensé que Diofanto querría decir que $2a + 1$ (a par) fuese un número primo, ya que los primos de la forma $4n + 1$ como 5, 13, 17, 29, 41, etc., se componen de dos cuadrados. Pero tampoco se sostiene esta lectura: quedarían excluidos los a tales que $2a + 1 = \Box$, muy aptos para resolver el problema (como en *II-8*); y por otro lado, los a como 22, 58, 62 e infinitos otros, tales que $2a + 1$ se descompone en dos cuadrados aun teniendo varios divisores primos: $45 = 36 + 9$, $117 = 81 + 36$, $125 = 100 + 25$. Acéptese la condición en la forma que le hemos dado hasta que alguien restituya el pensamiento de Diofanto a partir de un códice mejor restaurado."

Problema V-9: Observaciones de Fermat

Son dos observaciones referidas a la condición necesaria inicial de Diofanto.

Problema V-9: Observaciones de Fermat

- En la primera observación da una respuesta rápida a la duda de Bachet sobre si un número, como 21, que no es ni cuadrado ni suma de dos cuadrados enteros, podría ser suma de dos cuadrados racionales:

  El número 21 no se puede descomponer en dos cuadrados fraccionarios. Lo puedo demostrar muy fácilmente; con mayor generalidad, ningún número divisible por 3 pero no por 9 puede ser suma de dos cuadrados, ni enteros ni fracccionarios.

  La primera demostración de que *si un número no es suma de dos cuadrados enteros, tampoco es suma de dos cuadrados racionales*, asunto infructuosamente tratado por Fermat y Euler, parece ser la que dio L. Aubry en 1912 (Solution de quelques questions d'analyse indéterminée, *Sphinx-Œdipe*, 7(1912), p. 81-84).

Problema V-9: Observaciones de Fermat

- En la segunda observación, en relación con el tratamiento aproximativo que da Bachet a la segunda condición necesaria del problema sobre el número dado a, Fermat reescribe una condición necesaria para que un número entero sea representable como suma de dos cuadrados que ya había comunicado por carta a Roberval en 1640:

  Es necesario que el número dado a no sea impar, y que $2a + 1$, tras división por el mayor cuadrado que contenga como factor, no se pueda dividir por un número primo de la forma $4n - 1$.

  "Os confieso con franqueza que nunca en la teoría de los números he encontrado algo que me haya complacido tanto como la demostración de esta proposición, y me gustaría que hiciéseis el esfuerzo de probarla, sólo por saber si estoy estimando mi invención en más de lo que vale."

Problema V-9: Observaciones de Fermat

La condición de Fermat es también suficiente. La demostración de la suficiencia, que es la parte más difícil, se reduce a probar que *todo primo de la forma $4n+1$ es suma de dos cuadrados*. Fermat anunciaba este resultado, añadiendo además que *en este caso la representación es única*, en una carta de 1640 a Mersenne. Pero no dejó escrita la demostración. El primero en hacerlo fue Euler (carta a Goldbach de 6 de mayo de 1747; E.228: *De numeris qui sunt aggregatis duorum quadratorum*, 1752).

La demostración de Euler es "fermatiana": se sirve de una técnica indirecta de *descenso*.

Problema VI-17

VI-17: Encontrar un triángulo rectángulo tal que el área más la hipotenusa sea un cuadrado, y el perímetro sea un cubo

Es decir, encontrar (x, y, z) tal que

$$\tfrac{1}{2}xy + z = \square, \quad x + y + z = \text{cubo}$$

Sea el área $\frac{1}{2}xy = \alpha$ y la hipotenusa $z = \square - \alpha$. El producto de los catetos es $xy = 2\alpha$; sean $x = 2$, $y = \alpha$; el perímetro es $2 + \alpha + \square - \alpha = 2 + \square$, y hay que encontrar una solución de $\square + 2 = \text{cubo}$.

Si el lado del cuadrado es $m + 1$ y el del cubo $m - 1$, la condición se escribe

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 + 3m - 3m^2 - 1,$$

de donde resulta $m = 4$, $\square = 25$ y $\text{cubo} = 27$.

VI-17: Encontrar un triángulo rectángulo tal que el área más la hipotenusa sea un cuadrado, y el perímetro sea un cubo

Es decir, encontrar (x, y, z) tal que

$$\frac{1}{2}xy + z = \square, \quad x + y + z = \text{cubo}$$

Poniendo ahora $x = 2$, $y = \alpha$, $z = 25 - \alpha$, el área más la hipotenusa es un cuadrado y el perímetro es un cubo. Queda imponer que sea $z^2 = x^2 + y^2$, es decir,

$$625 + \alpha^2 - 50\alpha = 4 + \alpha^2,$$

de donde resulta $\alpha = \frac{621}{50}$, y la solución: $x = 2$, $y = \frac{621}{50}$, $z = \frac{629}{50}$.

Problema VI-17: Comentario de Bachet

La ecuación $x^2 + 2 = y^3$ que aparece en la resolución del problema tiene infinitas soluciones en números racionales.

Bachet enseña un modo general de obtener, a partir de una primera solución conocida (x_1, y_1) de la ecuación general $x^2 + a = y^3$, una segunda solución racional:

Se pone $x = x_1 - \xi$ e $y = y_1 - \frac{2x_1}{3y_1^2}\xi$; entonces, de la igualdad

$$(x_1 - \xi)^2 + a = \left(y_1 - \frac{2x_1}{3y_1^2}\xi\right)^3$$

resulta el valor racional $\xi = \frac{9y_1^3(4x_1^2 - 3y_1^3)}{8x_1^3}$.

Problema VI-17: Observación de Fermat sobre $x^2 + 2 = y^3$

¿Puede haber, en números enteros, un cuadrado distinto de 25 que aumentado en 2 unidades forme un cubo? En principio parece muy difícil contestar esta pregunta; sin embargo yo puedo probar, con una demostración rigurosa, que 25 es el único cuadrado entero que es inferior a un cubo en 2 unidades. En números fraccionarios, el método de Bachet proporciona una infinidad de tales cuadrados; pero la teoría a propósito de números enteros, muy bella y sutil, no era conocida hasta el presente, ni por Bachet, ni por ningún autor del que yo haya visto los escritos.

Fermat notificó a Carcavi, en 1659, que tenía una demostración de este resultado, y otra, de que las únicas soluciones enteras de $x^2 + 4 = y^3$ son $(2, 2)$ y $(11, 5)$, mediante una aplicación especial de su método de *descenso* con el que había probado que ningún cubo puede ser suma de dos cubos. Esa demostración de Fermat tampoco ha sobrevivido. La primera prueba válida apareció en el *Álgebra* de Euler (1770).

Bibliografía

André Weil (1981)
Sur les origines de la géométrie algébrique
Compositio Mathematica, tome 44, n° 1-3, p. 395-406

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
  Revue d'histoire des sciences et de leurs applications.
  Année 1966, Volume 19, Numéro 4 p.289-306

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
  Diophantus and Diophantine equations.
  The Mathematical Association of America. Dolciani Mathematical Expositions No.20

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
- S. W. Dolan (1982)
  On expressing numbers as the sum of two cubes.
  The Mathematical Gazette, Vol. 66, No. 435 (Mar., 1982), pp. 31-38

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
- S. W. Dolan (1982)
- I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova, Abe Shenitzer (1999)
  The Birth of Literal Algebra
  The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 1 (Jan., 1999), pp. 57-66

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
- S. W. Dolan (1982)
- I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova, Abe Shenitzer (1999)
- J. D. Swift (1956)

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
- S. W. Dolan (1982)
- I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova, Abe Shenitzer (1999)
- J. D. Swift (1956)
  Diophantus of Alexandria
  The American Mathematical Monthly, Vol. 63, No. 3 (Mar., 1956), pp. 163-170

Bibliografía

- André Weil (1981)
- Isabelle Bachmaková (1966)
- Isabella Grigoryevna Bashmakova (1997)
- S. W. Dolan (1982)
- I. G. Bashmakova, G. S. Smirnova, Abe Shenitzer (1999)
- J. D. Swift (1956)

FIN

Muchas gracias!