



**ASIGNATURA:** METODOLOGÍA MATEMÁTICA

**CURSO:** Op. 2ci.; 2007-2008

**PROFESORA:** Inés M. Gómez-Chacón

**CARÁCTER/CRÉDITOS:** 7,5

**DEPARTAMENTO:** ÁLGEBRA

**FACULTAD DE CC. MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

## Tema 8: Utilización de los medios tecnológicos en el aprendizaje matemático

### EJERCICIO PARA PRACTICAR GEOGEBRA:

#### A- ORTOCENTRO

Vamos a construir un triángulo y a partir de él hallar su **ortocentro**:

1. Señalamos tres puntos en la zona gráfica.
2. Unimos los puntos por segmentos.
3. Hallamos las alturas. Consejo: Podemos crear un macro, es decir una nueva herramienta, que nos calcule las alturas, para ello, primero hallamos una de las alturas, y luego vamos a menú→herramientas→creación de nueva herramienta. Aquí nos aparecerá una ventanita, en objetos de salida ponemos el segmento que hemos definido como la altura, en objetos de entrada ponemos el lado del triángulo y el vértice correspondientes, por último le ponemos un nombre a la nueva herramienta y una ayuda para su uso.
4. Señalamos el punto de intersección de las tres alturas y hemos hallado el ortocentro.
5. Ahora vamos a poner un pequeño menú, para ello escribimos en la barra de entradas *true*. Como vemos aparece en la ventana algebraica una variable con valor true pero no aparece nada en la zona gráfica, pinchamos sobre la variable y le damos al botón derecho, vamos a propiedades y señalamos en *exponer objeto*. Vemos que nos sale una casilla con el nombre de la variable. Vamos a ponerle un sobrenombre, volvemos a pinchar en la variable dando al botón derecho y otra vez a propiedades, vamos al menú nombre y en subtítulo ponemos alturas y le damos a Intro. Una vez hecho esto seleccionamos una de las alturas, le damos al botón derecho y nos vamos al menú avanzado y en condición para mostrar el objeto ponemos el nombre de la variable que asignamos a true. Si ahora pinchamos en la casilla que aparece en la ventana gráfica vemos que aparece y desaparece el segmento. Repetimos esto para todas las alturas. Creamos otra variable booleana para el ortocentro.

#### Ejercicios para ENTREGAR:

1. A partir del ejemplo anterior crear un archivo en el que se calcule el ortocentro, circuncentro, incentro, baricentro así como la recta de Euler, las circunferencias tanto inscrita como circunscrita haciendo un menú como el ejemplo anterior.  
Ayuda: **Circuncentro** es el punto en que se cortan las mediatrices de un triángulo y centro de la circunferencia circunscrita. Todos los vértices se encuentran a la misma distancia del circuncentro.  
El **baricentro** corresponde al punto donde se cortan las medianas. (Línea que une cualquier vértice con el punto medio del lado opuesto al vértice). Divide al triángulo en dos partes con la misma área. También se verifica que dos tercios de la longitud

de cada mediana están entre el vértice y el centroide, mientras que el tercio restante está entre el baricentro y el punto medio del lado opuesto.

El **incentro**, es un modo moderno de llamar al punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo. Con centro en el incentro, se puede trazar una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, que se llama circunferencia inscrita.

La **recta de Euler** es la recta que une el baricentro, el circuncentro y el ortocentro.

2. Crear un macro que a partir de una altura se obtenga el triángulo equilátero correspondiente.

### Ejercicios para PRACTICAR:

#### B- POLÍGONO REGULAR

1. Vamos hacer una construcción de un polígono regular de diferentes lados, para ello necesitamos un deslizador, tenemos dos opciones para crearlo, elegimos una de las dos siguientes:

- Con el botón del deslizador de la barra de herramientas, si pinchamos en el icono del deslizador y luego en un punto en la zona gráfica, nos saldrá una ventanita donde ajustar las propiedades, le ponemos que el incremento se de uno en uno, y que vaya por ejemplo de 3 a 10, luego lo señalamos damos al botón derecho y lo renombramos a n.
- Ahora por el campo de entradas ponemos  $n=10$ , como observamos no aparece nada en la zona gráfica, así que vamos a la ventana algebraica señalamos el n y de la damos al botón derecho, marcamos exponer objeto, como vemos ya aparece el deslizante, ahora tenemos que ponerle las propiedades que antes pedíamos, le damos al botón derecho señalando el deslizante y cambiamos el intervalo y el incremento como antes.

Ahora necesitamos crear un ángulo, cuyo valor será  $360/n$ , ponemos  $\alpha=360/n^\circ$  en el campo de entradas, tener cuidado que el circulito hay que ponerlo con el ratón.

Vamos ahora a crear unos puntos, ponemos  $A=(0,1)$  en el campo de entradas, cuidado que si no lo ponemos en mayúsculas lo interpretara como un vector, hacemos la circunferencia de radio 1 y en ella seleccionamos un punto, y le renombramos como Y, lo hacemos así porque así si ahora lo deslizamos el punto Y se moverá por la circunferencia. Hacemos la semirrecta que pase por A y Y y en donde queramos seleccionamos el punto B.

Ahora a partir de B vamos a ir rotando para hallar todos los puntos del polígono, para ello ponemos el valor de  $n=10$  en el deslizante, ahora podemos hacerlo de dos formas:

- Damos al icono de rotación de un objeto en torno a un punto dado un ángulo, señalamos el punto que queremos rotar, es decir el B, el centro de la rotación, el A y el ángulo de rotación, en nuestro caso el  $\alpha$ . Por defecto el programa nos lo llamara C.
- Otra forma es con el comando `rota[ ]`, ponemos `rotación[B, $\alpha$ ,A]` y nos crea el punto C.

Con la misma construcción y el mismo ángulo hacemos una rotación de C, así hasta volver al punto B.

Por tanto ya solo nos queda unir lo segmentos que delimitan el polígono, que como siempre lo podemos hacer de dos formas:

- Damos en el icono segmento entre dos puntos y señalamos, por ejemplo, los puntos B y C.
- La otra forma es con el comando segmento[], ponemos segmento[B,C].

Repetimos esta operación para cada par de vértices y tenemos nuestro polígono variable según n.

Si nos fijamos en algunos casos, en concreto en el  $n=6$  y el  $n=7$ , nos sale una arista que no deseamos, en concreto ocurre para el mismo segmento, vamos a intentar remediarlo, para ello seleccionamos dicho segmento y le damos al botón derecho, vamos a utilizar la función si[expresión booleana, true, false] , entonces le damos a redefinir y ponemos si[ $n \neq 6 \wedge n \neq 7$ , segmento[B,K], segmento[B,H]] los segmentos dependen de cual sea el que se nos repita.

### C- CONSTRUIR UNA ELIPSE

2. Ahora vamos a construir una elipse a partir de su distancia focal y su semieje mayor, supongamos que la distancia focal es tres,  $c=3$ , y que el semieje mayor es  $a=4$ . Introducimos los focos, para ello ponemos  $F=(0,3)$  en la barra de entradas y para hallar  $F'$  utilizamos el comando refleja objeto en recta o refleja objeto en punto, ahora trazamos la circunferencia de radio  $2a=8$  y centro  $F'$ , marcamos un punto en dicha circunferencia que se llamara por defecto A, ahora trazamos la recta que pasa por  $F'$  y el punto A, trazamos ahora la mediatriz entre A y F, marcamos el punto de intersección de la mediatriz la recta  $AF'$ , que por defecto será el punto B. Ahora usamos el comando lugar geométrico, señalamos los puntos A y B, comprobamos que nos dibuja la elipse.

#### Ejercicio para ENTREGAR:

A partir del ejemplo anterior, hacer un programa que utilice la misma construcción pero esta vez para hallar una hipérbola, introducir deslizadores para que el programa construya elipses e hipérbolas según el valor de la distancia focal y el semieje mayor. Recordatorio: en la elipse el semieje mayor es mayor que la distancia focal ( $a > c$ ), en cambio en la hipérbola ocurre lo contrario ( $a < c$ ).

#### Ejercicios para PRACTICAR:

### FUNCIÓN SENO

1. Representar gráficamente la función seno, su derivada y su tangente en un punto, así como el triángulo ilustrativo de la pendiente de la misma.

Versión 1: El punto está sobre la gráfica de la función

Teclear en el campo de entradas la función  $f(x) = \sin(x)$  y pulsar Intro.

Seleccionar el modo “Nuevo Punto” y hacer clic sobre la representación gráfica de la función f. Así se crea un punto A sobre la gráfica de f.



Luego activar el modo “Tangentes” y hacer clic sobre el punto A y sobre la gráfica de f. Renombrar t a la tangente (clic derecho sobre ella y “Renombrar”)

Teclear el comando  $m = \text{Pendiente}[t]$ .

Seleccionar el modo “Desplaza” y arrastrar el punto A observando el movimiento de la tangente.

Teclear  $B = (x(A), m)$  y activar la traza de este punto (clic derecho sobre B y “Activa trazo”).

Seleccionar el modo “Desplaza” y arrastrar el punto A observando el trazado provocado por B.

Teclear el comando  $\text{Derivada}[f]$ .

#### Algunos trucos

Insertar una función diferente, por ejemplo  $f(x) = x^3 - 2x^2$  en el campo de entradas; inmediatamente aparecerán su derivada y su tangente.

Seleccionar el modo “Desplaza” y arrastrar la gráfica de f con el ratón. Observar los cambios en las expresiones de la función y de su derivada.

#### Versión 2: Punto en $x = a$

Vamos a realizar la misma construcción anterior pero de otro modo. Para empezar, seleccionar “Archivo – Nuevo” para abrir una nueva hoja de trabajo. Luego introducir en el campo de entradas los comandos siguientes, tecleando Intro al final de cada línea:

$$f(x) = \sin(x)$$

$$a = 2$$

$$A = (a, f(a))$$

$$t = \text{Tangente}[a, f]$$

$$m = \text{Pendiente}[t]$$

$$B = (x(A), m)$$

$$\text{Derivada}[f]$$

Seleccionar el modo “Desplaza” y hacer clic sobre el número a. Pulsar las teclas de las flechas para modificar su valor. Inmediatamente el punto A y la tangente se desplazarán a lo largo de la gráfica de f.

Deslizadores: También puede controlarse el valor del número a utilizando un deslizador: clic derecho sobre a en la ventana de álgebra y activar “Expone objeto”.

Truco: los deslizadores y las teclas de flechas son especialmente útiles para trabajar con parámetros, por ejemplo p y q en la función cuadrática  $y = x^2 + p x + q$ .

#### Tangente sin el comando proveído

GeoGebra también trabaja con vectores y con ecuaciones paramétricas. Así será posible construir una tangente t sin necesidad de recurrir al comando  $\text{Tangente}[]$ . Para comprobarlo, suprimir la tangente de la figura, haciendo clic derecho sobre la recta y seleccionando “Borra”. Luego introducir los comandos siguientes:

$$v = (1, f'(a))$$

$$\text{recta}[A, v]$$



$v$  es un vector direccional de la tangente  $t$ .

Vamos a probar también el comando `Integral[]`.

Ponemos `integral[f]` y como vemos nos crea la integral indefinida del  $\sin(x)$ .

Pero también podemos hacer integrales definidas, para ello ponemos en la barra de entradas, `integral[f,0,3]`.

Si queremos ver el área que encierran dos funciones, también utilizamos el comando `integral`, por ejemplo, `integral[f,f',4,6]`.

## ELABORACION DE APPLETS

2. Ahora vamos a utilizar una herramienta muy útil en Geogebra 3.0, si nos vamos al menú de herramientas  $\rightarrow$  personalización de la barra de herramientas vemos que podemos poner y quitar comandos en la barra de herramientas, pues vamos hacer un ejercicio que nos pida hallar la perpendicular a una recta desde un punto y dejar solo algunas herramientas.

Lo primero dibujamos la recta, a través de dos puntos, y ocultamos dichos puntos, ahora marcamos un punto fuera de la recta. De la zona grafica quitamos los ejes. Ahora nos vamos a menú de herramientas  $\rightarrow$  personalización de la barra de herramientas, y quitamos todos los comandos dándole a borrar, como veréis el botón desplaza no deja quitarlo, vamos a poner los que queremos para ello le tenemos que seleccionar y dar a intercalar, queremos los comandos de nuevo punto, intersección de dos objetos, recta que pasa por 2 puntos y circunferencia con centro y punto que cruza. Introducimos un texto que pida lo que queremos. Ya tenemos lo que queríamos, pero como veréis ponerlo otra vez igual, es tarea sencilla, vamos a guardarlo como una pagina web para que no puedan modificar la barra de herramientas, para ello le damos a archivo  $\rightarrow$  exporta  $\rightarrow$  plantilla dinámica como pagina web(html)

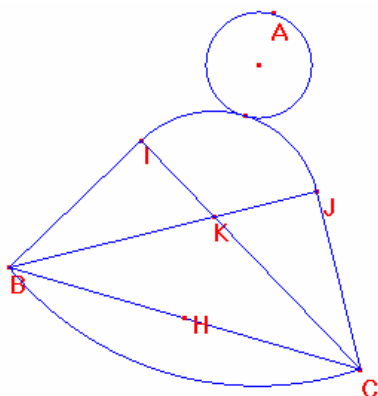
Nos aparece una ventanita, ponemos el titulo, el nombre del autor, la fecha, y si queremos un texto antes y otro después de la construcción, y dejamos señalado la pestaña de plantilla dinámica, en avanzado, ponemos las opciones que queramos, pero las esenciales, es que no exhiba la barra de menú y que no abra el área grafica con un doble clic.

### Ejercicios para ENTREGAR:

1. Crear un página web con un ejercicio (se darán más instrucciones).

2. La campana

Agranda la siguiente campana de tal manera que  $A'H'$  mida el doble que  $AB$ .



Escribe un protocolo de resolución del problema.

PISTAS PARA DIBUJAR LA CAMPANA:

- 1) Observa que  $A$  está sobre la recta  $BI$  y sobre la recta  $CJ$ .
- 2)  $H$  es el punto medio de  $BC$ .
- 3) Los ángulos  $IBC$  y  $JCB$  miden  $60^\circ$ .
- 4) Los ángulos  $BIC$  y  $CJB$  son ángulos rectos.



5) BC pertenece a una circunferencia de centro A.